

Introdução à teoria de controle de sistemas dinâmicos
Mini-curso do Workshop de Verão

Hugo Tadashi M. Kussaba
<https://lara.unb.br/~tadashi>

Sumário

1	Motivação	3
1.1	Sistemas dinâmicos em tempo contínuo	3
1.2	Sistemas dinâmicos em tempo discreto	6
2	Solução de equações diferenciais lineares	7
2.1	Solução de sistemas lineares em tempo contínuo	8
2.2	Solução de sistemas lineares em tempo discreto	11
3	Observabilidade	13
3.1	Observabilidade em tempo contínuo	13
3.2	Observabilidade em tempo discreto	16
4	Controlabilidade	19
4.1	Controlabilidade em tempo contínuo	19
4.2	Controlabilidade em tempo discreto	22
5	Estabilidade	23
5.1	Estabilidade em tempo contínuo	23
5.1.1	Estabilidade de equações diferenciais ordinárias	23
5.1.2	Estabilidade de sistemas lineares autônomos em tempo contínuo	24
5.2	Estabilidade em tempo discreto	25
5.2.1	Estabilidade de recorrências	25
5.2.2	Estabilidade de sistemas lineares autônomos em tempo discreto	26
6	Estabilização e estimação	27
6.1	Controle por realimentação de estados	27
6.1.1	Alocação de autovalores para sistemas com apenas uma entrada	27
6.1.2	Alocação de autovalores para sistemas com várias entradas	29
6.1.3	Estabilização por realimentação de estados	31
6.2	Controle por realimentação de saída	31
6.2.1	Controle direto por realimentação de saída	31
6.2.2	Observador de Luenberger	32
6.2.3	Controle com observador de estados	33
A	Revisão de alguns resultados de álgebra linear	34
A.1	Fórmula de Leibniz para determinantes	34
A.2	Autovalores e autovetores	34
A.3	Teorema de Cayley-Hamilton	35
A.4	Diagonalização e forma canônica de Jordan	35
A.5	Funções de matrizes	37
B	Outros resultados	37
	Referências	40

1 Motivação

Sistemas dinâmicos são ubíquos na matemática e na natureza. Consequentemente, a teoria de controle de sistemas dinâmicos encontra também as mais diversas aplicações: mecanismos de controle estão presentes no nosso dia a dia: um ar-condicionado tem um controle de temperatura, carros possuem controle de velocidade, e vários robôs contêm uma multitude de sistemas de controle essenciais para seu funcionamento. Na natureza temos também vários exemplos: organismos vivos usam algum tipo de controle para regular a temperatura e os níveis de açúcar no sangue em um nível adequado. Em vista disso, vários problemas na síntese de remédios podem ser resolvidos com base na teoria de controle. Diversos problemas de finanças e de ciências sociais também podem ser modelados como sistemas dinâmicos e resolvidos usando a teoria de controle. Por exemplo, para um investidor é interessante saber quando e em quais ativos investir (conforme veremos em um dos exemplos, o ato de investir em um determinado ativo pode ser interpretado como a atuação de um controle) para montar um portfólio de investimentos adequado. A opinião de uma multidão sobre determinado assunto também pode ser modelado como um sistema dinâmico (i.e. o sistema de opiniões de DeGroot): neste cenário um objetivo de controle possível é saber se é possível atingir o consenso das opiniões introduzindo pessoas alta influência. Não obstante, vários algoritmos iterativos (como por exemplo, o método de gradiente) também pode ser modelados como sistemas de controle e sua convergência ser analisada com ferramentas da teoria de controle.

1.1 Sistemas dinâmicos em tempo contínuo

Vamos introduzir primeiro e ilustrar algumas definições no contexto de sistemas dinâmicos de tempo contínuo, isto é, em sistemas formados por equações diferenciais. Considere o sistema de primeira ordem¹

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t), u(t)). \quad (1)$$

F é uma função conhecida que descreve a dinâmica da evolução do sistema, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de **variáveis de estado**, cujas componentes são as quantidades que desejamos acompanhar ou controlar, e $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é chamado vetor de **variáveis de controle**, ou ainda, **entrada do sistema**.

O objetivo da teoria de controle é achar uma função $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ adequada (possivelmente em função do estado x) que faça o sistema ter um comportamento desejado. Vejamos a seguir alguns exemplos:

Exemplo 1 (Controle de temperatura). Suponha que a variação de temperatura de um quarto seja proporcional tanto à temperatura exterior quanto a energia utilizada em um aquecedor. Podemos modelar este problema com a equação diferencial

$$x'(t) = -ax(t) + bu(t),$$

onde a variável de estado $x(t)$ é a diferença de temperatura entre o quarto e o exterior no tempo t e $u(t)$ é o calor inserido pelo aquecedor no tempo t , e a e b são constantes positivas que descrevem a física do problema (isolamento do quarto, condutividade térmica do aquecedor, etc.). Dado $T > 0$, um objetivo de controle possível seria achar uma função $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ que leva a diferença de temperatura inicial $x(0)$ para a diferença de temperatura final $x(T)$ em um tempo T .

Exemplo 2 (Pêndulo invertido). O veículo Segway pode ser modelado por um sistema mecânico conhecido como pêndulo invertido (ver Figura 1).

¹Vamos sempre assumir que F seja suficientemente regular a fim de que o problema de valor inicial associado à (1) sempre tenha uma solução única. Em particular, neste minicurso as funções F encontradas irão sempre satisfazer as condições do teorema de Picard-Lindelöf.

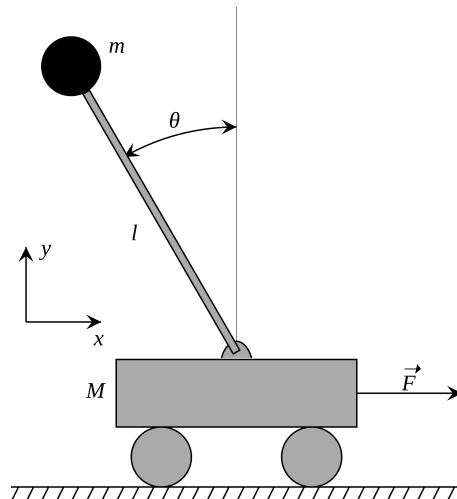


Figura 1: Veículo Segway modelado como um pêndulo invertido.

Pelas leis de Newton, o sistema mecânico pode ser descrito pelas equações diferenciais

$$\begin{aligned} (M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos(\theta) + ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) &= F, \\ \ddot{\theta} - g \sin(\theta) &= \ddot{x} \cos(\theta), \end{aligned} \quad (2)$$

com $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$. Podemos expressar (2) como (1) da seguinte forma. Substituindo \ddot{x} na primeira equação obtemos

$$(M + m) \frac{[\ddot{\theta} - g \sin(\theta)]}{\cos(\theta)} + ml\ddot{\theta} \cos(\theta) + ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) = F,$$

ou seja,

$$\left[\frac{(M + m)l}{\cos(\theta)} + ml \cos(\theta) \right] \ddot{\theta} + ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) - (M + m)g \tan(\theta) = F$$

Escolhendo $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$ como as variáveis de estados e F como nossa entrada de controle, temos que

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{mlx_2^2 \sin(x_1)}{z(x_1)} + \frac{(M+m)g \tan(x_1)}{z(x_1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{z(x_1)} \end{bmatrix} F,$$

onde $z(x_1) := \frac{(M+m)l}{\cos(x_1)} + ml \cos(x_1)$. Um problema canônico de controle nesse contexto é equilibrar a massa m no ângulo $\theta = 0$ no tempo T a partir da força F , ou seja, achar uma função $F := F(t, x, \theta)$ de modo a se ter $\theta(T) = 0$.

Exemplo 3. [15, pgs.15-16] A concentração de um remédio y_1 e o número de células imunes, saudáveis e cancerígenas (respectivamente, y_2 , y_3 e y_4) em um órgão do corpo humano em um tempo t durante um tratamento de quimioterapia pode ser expressas pelas equações diferenciais:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= u(t) - \gamma_6 y_1 \\ \frac{dy_2}{dt} &= \dot{y}_{2,e} + r_2 \frac{y_2 y_4}{\beta_2 + y_4} - \gamma_3 y_2 y_4 - \gamma_4 y_2 - \alpha_2 y_2 (1 - e^{-y_1 \lambda_2}) \\ \frac{dy_3}{dt} &= r_3 y_3 (1 - \beta_3 y_3) - \gamma_5 y_3 y_4 - \alpha_3 y_3 (1 - e^{-y_1 \lambda_3}) \\ \frac{dy_4}{dt} &= r_1 y_4 (1 - \beta_1 y_4) - \gamma_1 y_3 y_4 - \gamma_2 y_2 y_4 - \alpha_1 y_4 (1 - e^{-y_1 \lambda_1}) \end{aligned}$$

onde $y_{2,e}$ é a taxa constante de células imunes que entram no órgão para combater as células cancerígenas, e $u(t)$ é a taxa de injeção do remédio no órgão no instante t . Como em geral o remédio tem efeitos tóxicos e matam também as células imunes e saudáveis no processo, desejamos minimizar o total de remédio aplicado no órgão. Note que u pode ser vista como a entrada de controle desse sistema, e um problema de controle nesse caso seria achar uma função u que minimiza $y_4(t_f)$ e $\int_0^{t_f} u(s) ds$, onde t_f é o tempo final do tratamento de quimioterapia.

Exemplo 4. [6] Um modelo de desemprego de um país é dado por

$$\begin{aligned}\frac{dU}{dt} &= \Lambda - \kappa U(t)V(t)(1 + u_2(t)) - \alpha_1 U(t) + \gamma E(t) - u_1(t), \\ \frac{dE}{dt} &= \omega + \kappa U(t)V(t)(1 + u_2(t)) - \alpha_2 E(t) - \gamma E(t) - \delta E(t) + \rho U(t) + u_1(t),\end{aligned}$$

onde

Variável	Significado
$U(t)$	Número de indivíduos desempregados no tempo t
$E(t)$	Número de indivíduos empregados no tempo t
$V(t)$	Número de vagas no tempo t
Λ	Número de indivíduos desempregados que está aumentando continuamente
κ	Taxa em que os indivíduos desempregados estão se tornando empregados
α_1	Taxa de migração e de morte de indivíduos desempregados
α_2	Taxa de aposentadoria ou morte de indivíduos empregados
γ	Taxa de pessoas que são despedidas do seu trabalho
ω	Número de empregos criados e preenchidos
δ	Indica a taxa de diminuição das vagas por falta de fundos
ρ	Taxa de aumento do emprego devido à desvalorização salarial da força de trabalho
u_1	Oferta de estágio
u_2	Medidas indiretas do governo para aumentar o emprego (ex.: diminuição de taxas de impostos)

Note que as variáveis u_1 e u_2 podem ser controladas ou incentivadas indiretamente pelo governo do estado. Um problema de controle (ótimo) seria minimizar o desemprego com o mínimo uso de recursos possíveis (representados pelas variáveis u_1 e u_2).

O controle pode depender ou não da variável de estado. Considere o problema de controle de temperatura: podemos fazer uma estratégia de aquecimento periódica dependendo apenas da hora, do dia e da época do ano. Neste caso, o controle não depende da variável de estado. Se além do horário, a estratégia de controle leva em conta também a temperatura atual do quarto e do exterior, o controle também vai depender da variável de estado (isto é, a diferença de temperatura). No caso em que o controle depende da variável de estado, dizemos que o controle é um **controle de malha fechada**. Caso contrário, dizemos que o controle é um **controle de malha aberta**. Alguns autores chamam o primeiro problema de problema de regulação, e o segundo problema apenas de controle.

Nos exemplos anteriores, tratamos a variável de estado como sendo sempre possível de medir. Em muitas situações físicas, no entanto, não temos um sensor para medir todas as variáveis de estado diretamente. No melhor caso é possível apenas inferir ela a partir das outras variáveis de estado. Neste tipo de problema, existe uma função $G : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ satisfazendo

$$y(t) = G(t, x(t), u(t)),$$

onde $y(t) \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de **variáveis de saída**, ou ainda, **saída** do sistema. Neste contexto, além de controlar as variáveis de estado, devemos também estimar elas a partir da saída y .

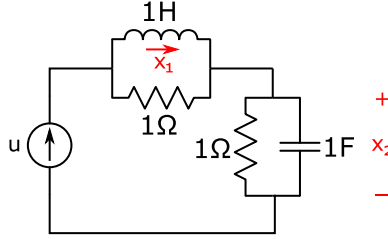


Figura 2: Circuito elétrico

Exemplo 5. O circuito elétrico ilustrado na Figura 2 é modelado pelas seguintes equações diferenciais:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Suponha que só temos um multímetro disponível. Será possível estimar o estado x_2 a partir apenas das medições de x_1 (isto é, $y = x_1$)? E será possível estimar o estado x_1 a partir apenas das medições de x_2 (isto é, $y = x_2$)? Veremos nas próximas aulas como resolver esta questão.

1.2 Sistemas dinâmicos em tempo discreto

De modo análogo, podemos definir o problema de controle para sistemas dinâmicos em tempo discreto. Neste caso o sistema dinâmico é formado por um sistema de equações de recorrência:

$$x_{k+1} = F(k, x_k, u_k). \quad (3)$$

Este tipo de sistema surge naturalmente ao amostrar um sistema de contínuo, mas há também outros exemplos que são modelados por (3).

Exemplo 6 (Gerenciamento de ativos). Considere o seguinte modelo de investimento de capital em n ativos:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 + r_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 + r_{2k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 + r_{nk} \end{bmatrix} x_k + u_k,$$

onde $[x_k]_j$ é o capital ao final do k -ésimo ano investido no ativo j , $[u_k]_j$ é o capital investido no ativo j ao longo do ano k e $r_{jk} > 0$ é o retorno anual do ativo j ao final do k -ésimo ano. A entrada u_k pode ser vista como uma entrada de controle, e um problema de controle clássico é escolher uma sequência u_k adequada de forma a maximizar o capital ganho durante um determinado horizonte de anos.

Exemplo 7 (Equação de Lindley). O tempo de espera de uma pessoa na fila pode ser modelado pela equação de Lindley. Neste caso, a componente x_k da variável de estado é o tempo de espera da k -ésima pessoa e esta é modelado pela equação

$$x_{k+1} = \max\{x_k + s_k - \alpha_k, 0\},$$

onde s_k é o tempo de serviço para atender a k -ésima pessoa e α_k é o tempo entre a k -ésima e $(k + 1)$ -ésima chegada. Note que podemos interpretar s_k como um controle, e um objetivo possível seria escolher uma sequência s_k adequada para diminuir o tempo médio de espera das pessoas da fila.

Exemplo 8 (Convergência de algoritmos iterativos). O método do gradiente com tamanho de passo constante é dado por

$$x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k). \quad (4)$$

Uma forma de reescrever (4) é (ver Figura 3)

$$\begin{aligned}\xi_{k+1} &= \xi_k - \alpha u_k, \\ y_k &= \xi_k, \\ u_k &= \nabla f(y_k).\end{aligned}$$

Deste modo o método do gradiente pode ser interpretado como um sistema de controle onde a saída no tempo k é y_k , a entrada no tempo k é u_k e a variável de estado no tempo k é ξ_k . É interessante mencionar que esta técnica também pode ser utilizado para analisar outros algoritmos iterativos usando ferramentas clássicas da teoria de controle: para mais informações sobre este método ver por exemplo, o pre-print [8].

2 Solução de equações diferenciais lineares

Neste minicurso de introdução restringiremos a análise e o controle para os sistemas dinâmicos ditos lineares. No caso em que o tempo é contínuo, vamos estudar F e G que assumem a seguinte forma:

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t), u(t)) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad (5)$$

$$y(t) = G(t, x(t), u(t)) = C(t)x(t) + D(t)u(t), \quad (6)$$

onde $A : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $B : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$, $C : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^{p \times n}$ e $D : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^{p \times m}$ são funções contínuas em $[t_0, t_1]$, e $u : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função pertencente a $L^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m)$ ². Para abreviar, denotaremos um sistema de controle (5)-(6) por $(A(t), B(t), C(t), D(t))$. No caso em que uma dessas matrizes forem identicamente nulas, os espaços correspondentes às matrizes nulas serão vazios (e.g.: se $B(t) \equiv 0$, então denotaremos o sistema de controle por $(A(t), , C(t), D(t))$).

No caso do tempo discreto, teremos que o sistema é dado por

$$x_{k+1} = F(k, x_k, u_k) = A_k x_k + B_k u_k \quad (7)$$

$$y_k = G(k, x_k, u_k) = C_k x_k + D_k u_k \quad (8)$$

onde $A_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_k \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C_k \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $D_k \in \mathbb{R}^{p \times m}$ para todo $k = 0, 1, 2, \dots$. Para abreviar, denotaremos um sistema de controle (7)-(8) por (A_k, B_k, C_k, D_k) . No caso em que uma dessas matrizes forem identicamente nulas, os espaços correspondentes às matrizes nulas serão vazios (e.g.: se $B_k \equiv 0$, então denotaremos o sistema de controle por $(A_k, , C_k, D_k)$).

²Caso o leitor não tenha familiaridade com a integral de Lebesgue, pode-se restringir u para o espaço das funções contínuas em $[t_0, t_1]$ com valores em \mathbb{R}^m .

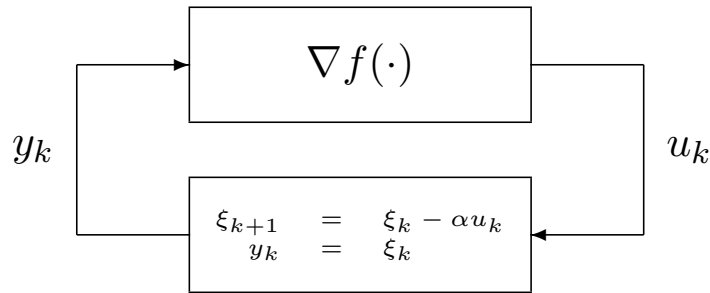


Figura 3: Representação do método do gradiente como sistema de controle

2.1 Solução de sistemas lineares em tempo contínuo

Pelo teorema de Picard-Lindelöf, um problema de valor inicial associado à (5) sempre tem uma única solução³. Como podemos obter a solução de (5) explicitamente?

Vamos considerar primeiro o caso em que $A(t) = A$ e $B(t) = 0$ para todo $t \geq t_0$. Se A fosse um escalar a em vez de uma matriz $n \times n$ ($n > 1$), então a solução de

$$\dot{x}(t) = ax(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (9)$$

seria dada por $\exp(at)x_0$. Uma ideia para generalizar o conceito de exponencial para matrizes de modo a preservar a propriedade de que a derivada de e^{at} é ae^{at} , é usar uma série análoga à série de Taylor da exponencial para definir a exponencial de uma matriz. Precisamente, definimos e^M , **a exponencial da matriz M** , como

$$e^M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!} \quad (10)$$

Vamos mostrar que (10) está bem definida para qualquer matriz M . Temos que:

$$\begin{aligned} \|e^M\| &= \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!} \right\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{M^k}{k!} \right\| \quad (\text{Desigualdade triangular}) \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|M\|^k}{k!} \quad (\text{Subaditividade da norma}) \\ &= e^{\|M\|} < \infty, \end{aligned}$$

portanto a série definida por e^M converge para qualquer matriz M . Usando a definição (10), pode-se demonstrar que a solução de (9) é dada justamente por

$$x(t) = e^{tA}x_0.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} &= e^{tA} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{hA} - I}{h} \\ &= e^{tA} \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} A^k - I \\ &= e^{tA} \lim_{h \rightarrow 0} \left(A + \frac{hA^2}{2!} + \frac{h^2A^3}{3!} + \dots \right) \\ &= e^{tA}A. \end{aligned}$$

Portanto, a aplicação $t \mapsto e^{tA}$ é diferenciável e sua derivada é dada por $t \mapsto Ae^{tA}$.

Observação 1. Há várias formas de calcular numericamente a exponencial de uma matriz. Para mais informações, ver [11].

Teorema 1. *O problema de valor inicial*

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(t_0) = x_0$$

³Uma prova para o problema de valor inicial de (5) pode ser vista em [2, pgs. 336-338]

possui como única solução a função

$$x(t) = e^{tA}x_0.$$

No caso em que $B(t) = B \neq 0$, temos que a solução do problema de valor inicial

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(t_0) = x_0$$

possui como única solução a função

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}Bu(s) ds.$$

Demonstração. Ver pg. 332 e pg. 336 de [2]. □

Observação. Note que no caso em que a matriz A e a matriz B não dependem explicitamente do tempo, podemos sem perda de generalidade estudar as soluções a partir do instante de tempo $t_0 = 0$. De fato, a equação diferencial $\dot{x}(t) = Ax(t)$ é invariante à uma translação no tempo, logo se $x(t)$ é uma solução dessa equação diferencial com $x(0) = x_0$, então $z(t) := x(t - t_0)$ é uma solução dessa mesma equação diferencial com $z(t_0) = x(0) = x_0$.

Exercício 1. Sejam $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz invertível. Demonstre as seguintes propriedades da matriz exponencial:

- (a) $e^0 = I$
- (b) Se $AB = BA$, então $e^{A+B} = e^A e^B$
- (c) $(e^A)^{-1} = e^{-A}$
- (d) $e^{MAM^{-1}} = M e^A M^{-1}$
- (e) $A e^A = e^A A$

Exercício 2. No exercício anterior vimos que se $AB = BA$, então $e^{A+B} = e^A e^B$. Esta condição também é necessária? Isto é, se $e^{A+B} = e^A e^B$, então $AB = BA$?

Vamos ver agora o caso em que as matrizes A e B são variantes no tempo. Aplicando o raciocínio anterior na equação

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad x(t) = x_0 \tag{11}$$

teríamos que se A fosse um escalar a em vez de uma matriz $n \times n$ ($n > 1$), então a solução de

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t), \quad x(t) = x_0 \tag{12}$$

seria dada por $x(t) = x_0 e^{\int_0^t a(s) ds}$. No entanto,

$$x(t) = \left[e^{\int_0^t A(s) ds} \right] x_0,$$

onde $\int_0^t A(s) ds$ é a matriz definida como $\left[\int_0^t A(s) ds \right]_{ij} = \int_0^t A_{ij}(s) ds$, nem sempre é solução de (11). Considere o seguinte contraexemplo: temos que

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{t^2}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t & \frac{t^3}{6} & 1 \end{bmatrix} x_0$$

é solução de

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{t}{2} & 1 \end{bmatrix} x(t), \quad x(0) = x_0,$$

mas

$$e^{\int_0^t \begin{bmatrix} 1 & s & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{s}{2} & 1 \end{bmatrix} ds} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{t^2}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t & \frac{t^3}{4} & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & \frac{t^2}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t & \frac{t^3}{6} & 1 \end{bmatrix}.$$

O problema de aplicar o raciocínio anterior é que a regra da cadeia funciona de maneira diferente para derivada de matrizes: é verdade que se $n = 1$, então temos que

$$[\exp A(t)]' = \exp [A(t)] \dot{A}(t), \quad (13)$$

mas devido à não comutatividade dos produtos entre $A(t)$ e $\dot{A}(t)$, o que vale em geral para $n > 1$ é que

$$[\exp A(t)]' = \left[I + A(t) + \frac{1}{2!} A^2(t) + \dots \right]' = \dot{A}(t) + \frac{1}{2!} [A(t)\dot{A}(t) + \dot{A}(t)A(t)] + \dots$$

É fácil observar que uma condição suficiente para que (13) seja válido é que $A(t)$ e $\dot{A}(t)$ comutem para todo $t \in \mathbb{R}$. Para resolver (11) é necessário introduzir primeiro o conceito de **matriz fundamental**.

Teorema 2. *Seja $A : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ uma função contínua com valores em matrizes $\mathbb{R}^{n \times n}$. Então o espaço das soluções da equação diferencial*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad (14)$$

é um subespaço vetorial do espaço de funções contínuas de $[t_0, t_1]$ para \mathbb{R}^n .

Definição 1. *Seja $A : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ uma função contínua com valores em matrizes $\mathbb{R}^{n \times n}$. Seja $\{x^1, \dots, x^n\}$ uma base para o espaço das soluções de (14). A matriz*

$$\psi(t) := [x^1(t) \quad \dots \quad x^n(t)], \quad t \in [t_0, t_1]$$

*é denominada **matriz fundamental** do sistema (14).*

As matrizes fundamentais de um sistema possui a seguinte propriedade importante: elas são sempre invertíveis para cada $t \in [t_0, t_1]$, conforme será mostrado no próximo exercício.

Exercício 3. *Seja ψ uma matriz fundamental do sistema (14).*

(a) *Seja $\psi_{ij}(t)$ o componente (i, j) da matriz $\psi(t)$. Mostre que*

$$\frac{d}{dt} \det[\psi(t)] = \sum_{i=1}^n \det \begin{bmatrix} \psi_{11}(t) & \psi_{12}(t) & \dots & \psi_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dot{\psi}_{i1}(t) & \dot{\psi}_{i2}(t) & \dots & \dot{\psi}_{in}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \psi_{n1}(t) & \psi_{n2}(t) & \dots & \psi_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

Dica: Use a fórmula de Leibniz para determinantes (ver apêndice)

(b) *Prove que*

$$\dot{\psi}_{ik}(t) = \sum_{j=1}^n A_{ij}(t)\psi_{jk}(t), \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n,$$

onde $A_{ij}(t)$ é o componente (i, j) da matriz $A(t)$.

(c) *Prove a seguinte relação para todo $i = 1, \dots, n$:*

$$\det \begin{bmatrix} \psi_{11}(t) & \psi_{12}(t) & \dots & \psi_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dot{\psi}_{i1}(t) & \dot{\psi}_{i2}(t) & \dots & \dot{\psi}_{in}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \psi_{n1}(t) & \psi_{n2}(t) & \dots & \psi_{nn}(t) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \psi_{11}(t) & \psi_{12}(t) & \dots & \psi_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{ii}(t)\psi_{i1}(t) & A_{ii}(t)\psi_{i2}(t) & \dots & A_{ii}(t)\psi_{in}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \psi_{n1}(t) & \psi_{n2}(t) & \dots & \psi_{nn}(t) \end{bmatrix} = A_{ii}(t) \det [\psi(t)]$$

Dica: Use o item (b) e que o valor do determinante não se altera ao subtrair de uma linha a combinação linear das outras linhas.

(d) Usando o item (a) e o item (c), mostre que

$$\frac{d}{dt} \det[\psi(t)] = \text{tr}[A(t)] \det[\psi(t)]$$

(e) Resolvendo a equação diferencial do item anterior (note que ela é escalar), temos a **fórmula de Liouville**:

$$\det[\psi(t)] = \det[\psi(t_0)] \exp\left(\int_{t_0}^t \text{tr}[A(s)] ds\right).$$

Por que essa fórmula implica que $\psi(t)$ é não invertível para todo $t \geq t_0$? *Dica: Lembre-se que $\psi(t_0)$ é invertível pela definição da matriz fundamental.*

Como ψ é sempre invertível, temos que a solução do problema de valor inicial (11) é dada por

$$x(t) = \psi(t)\psi^{-1}(t_0)x_0.$$

Note que por unicidade da solução de (11), a matriz $\Phi_A(t, s) := \psi(t)\psi^{-1}(s)$ não depende da escolha de $\psi(t)$.

Definição 2. Seja ψ uma matriz fundamental para (14). A função matricial definida pela aplicação $\Phi_A(t, s) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\Phi_A(t, s) := \psi(t)\psi^{-1}(s)$$

é denominada **matriz de transição de estados** de (11).

Note que no caso em que A é constante, teremos que $\Phi_A(t, s) = e^{(t-s)A}$.

Exercício 4. Prove que a matriz de transição de estados satisfaz as seguintes propriedades:

- (a) $\Phi_A(t, t) = I$
- (b) $\Phi_A(t, s) = \Phi_A(t, r)\Phi_A(r, s)$ (*propriedade de semigrupo*)
- (c) $\Phi_A(t, s)^{-1} = \Phi_A(s, t)$
- (d) $\frac{\partial \Phi_A}{\partial t}(t, s) = A(t)\Phi_A(t, s), \forall t \in [t_0, t_1]$

Consideremos agora o problema em que há entrada de controle:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(0) = x_0 \tag{15}$$

Teorema 3. *O problema de valor inicial (15) possui uma única solução contínua que é dada por*

$$x(t) = \Phi_A(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi_A(t, s)B(s)u(s) ds, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Demonstração. Ver pg.341 de [2]. □

2.2 Solução de sistemas lineares em tempo discreto

No caso discreto, a dinâmica dos estados é dada por⁴

$$x_{k+1} = A(k)x_k + B(k)u_k$$

⁴Note que usaremos x_0 tanto para o estado inicial em tempo discreto quando para o estado inicial em tempo contínuo.

Se $A(k)$ e $B(k)$ forem seqüências constantes (isto é, $A(k) = A$ e $B(k) = B$ para todo $k = k_0, k_0 + 1, \dots$), temos que

$$\begin{aligned} x_1 &= Ax_0 + Bu_0 \\ x_2 &= Ax_1 + Bu_1 = A^2x_0 + ABu_0 + Bu_1 \\ x_3 &= Ax_2 + Bu_2 = A^3x_0 + A^2Bu_0 + ABu_1 + Bu_2 \\ &\vdots \\ x_k &= A^kx_0 + \sum_{m=0}^{k-1} A^{k-1-m}Bu_m \end{aligned}$$

ou ainda, em forma matricial,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ A^2 \\ A^3 \\ \vdots \\ A^n \end{bmatrix} x_0 + \begin{bmatrix} B & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ AB & B & \ddots & \ddots & \vdots \\ A^2B & AB & B & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ A^{n-1}B & \cdots & A^2B & AB & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

No caso em que A e B variam com k , podemos introduzir uma matriz análoga à matriz de transição de estados. A matriz de transição de estados discreta é definida como a solução de

$$\Phi(k+1, k_0) = A(k)\Phi(k, k_0), \quad \Phi(k_0, k_0) = I$$

para $k = k_0, k_0 + 1, \dots$. A solução pode ser obtida diretamente para $k > k_0$ como

$$\Phi(k, k_0) = A(k-1)A(k-2) \cdots A(k_0), \quad \Phi(k_0, k_0) = I$$

No caso contínuo, a matriz de transição de estados é não singular para todo t e governa a propagação do estado no sentido direto e no sentido reverso do tempo. No caso discreto, entretanto, a matriz A pode ser singular e $\Phi(k, k_0)$ pode não ser definida. $\Phi(k, k_0)$ é definida apenas para $k \geq k_0$ e governa a propagação do estado no sentido direto. Assim,

$$\Phi(k, k_0) = \Phi(k, k_1)\Phi(k_1, k_0)$$

vale apenas para $k \geq k_1 \geq k_0$. A solução do sistema para $k > k_0$ é dada por

$$x(k) = \Phi(k, k_0)x_0 + \sum_{m=k_0}^{j-1} \Phi(k, m+1)B(m)u(m)$$

3 Observabilidade

Dado um sistema de controle linear em tempo contínuo

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t)\end{aligned}\tag{17}$$

ou um sistema de controle linear em tempo discreto

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= A(k)x_k + B(k)u_k \\ y_k &= C(k)x_k + D(k)u_k\end{aligned}\tag{18}$$

vamos resolver o problema de como determinar o estado presente desses sistemas a partir da observação da saída do sistema em tempos passados.

3.1 Observabilidade em tempo contínuo

Considere que temos acesso à entrada do sistema $u : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ e de sua saída $y : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^p$. A partir deste dados será possível reconstruir os estados do sistema? Note que se recuperarmos apenas o estado x_0 do sistema no tempo t_0 , podemos determinar as variáveis de estados em todo o horizonte de tempo $[t_0, t_1]$ resolvendo o problema de valor inicial

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0\tag{19}$$

Conforme visto anteriormente, a solução do problema de valor inicial (19) é dada por

$$x(t) = \Phi_A(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi_A(t, s)B(s)u(s) ds, \quad t \in [t_0, t_1],$$

portanto

$$y(t) = C(t)\Phi_A(t, t_0)x_0 + y^1(t),$$

onde $y^1(t) = \int_{t_0}^t C(t)\Phi_A(t, s)B(s)u(s) + D(t)u(t)$. Como y^1 pode ser calculado a priori com o conhecimento da entrada u , a determinação do estado inicial x_0 é equivalente à determinação de x_0 a partir da diferença $y - y^1$, que corresponde a saída do sistema homogêneo associado à (17), isto é,

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t).$$

Isso significa que para o problema de observabilidade, devemos apenas nos concentrar nas matrizes A e C do sistema.

Definição 3. O sistema é dito **observável** em $[t_0, t_1]$ quando para toda função $x \in C^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$ a condição

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad C(t)x(t) = 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

implicar em $x(t_0) = 0$. Em outras palavras, o núcleo da aplicação linear

$$\begin{aligned}G : \mathbb{R}^n &\rightarrow C([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n) \\ x_0 &\mapsto C(\cdot)\Phi_A(\cdot, t_0)x_0\end{aligned}$$

que leva um estado inicial x_0 à função $t \mapsto C(t)\Phi(t, t_0)x_0$ é injetiva. Dito em outras palavras, dois estados iniciais diferentes necessariamente correspondem à saídas diferentes.

No teorema a seguir vamos ver um critério equivalente à observabilidade do sistema.

Teorema 4. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. O sistema $(A(t), C(t))$ é observável em $[t_0, t_1]$
2. O **gramiano de observabilidade (observability Gramian)** definido como

$$W_o(t_0, t_1) := \int_{t_0}^{t_1} \Phi_A^T(s, t_0) C^T(s) C(s) \Phi_A(s, t_0) ds$$

é não singular.

Demonstração. Ver pgs. 28-29 de [2]. □

No caso em que as matrizes A e C não variam com o tempo, dizemos que o sistema é um **sistema autônomo**, ou ainda, **invariante no tempo**. Neste caso há critérios mais simples para verificar a observabilidade do sistema, conforme veremos no teorema a seguir.

Teorema 5. *Seja (A, C) um sistema de controle autônomo. As seguintes afirmações são equivalentes*

1. O sistema (A, C) é observável em $[0, T]$ para todo $T > 0$.
2. O sistema (A, C) é observável em $[0, T]$ para algum $T > 0$.
3. A matriz $W_T := \int_0^T e^{sA^T} C^T C e^{sA} ds$ é não singular para algum $T > 0$.
4. A matriz $W_T := \int_0^T e^{sA^T} C^T C e^{sA} ds$ é não singular para todo $T > 0$.
5. A **matriz de observabilidade** definida como a matriz $np \times n$ dada por

$$M_o(A, C) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

possui posto pleno (isto é, todas as colunas da matriz de observabilidade são linearmente independentes).

6. $\bigcap_{k=0}^{n-1} \text{Ker}(CA^k) = \{0\}$

Demonstração. Ver pgs. 30-31 de [2]. □

Corolário 1. *O sistema autônomo (A, C) é observável quando for observável em $[0, T]$ para um $T > 0$ qualquer.*

Exemplo 9. Voltando ao exemplo do circuito elétrico (Exemplo 5), temos que

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e $C = [1 \ 0]$, no caso em que medimos apenas x_1 , ou $C = [0 \ 1]$, no caso em que medimos apenas x_2 . Em ambos os casos temos que a matriz de observabilidade possui posto igual a 1, portanto o sistema não é observável.

Note que no exemplo anterior com $C = [1 \ 0]$ temos que nenhuma condição inicial do subespaço

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

pode ser observada a partir apenas da saída y . De fato,

$$C\Phi_A(t, t_0)x_0 = [1 \ 0] \begin{bmatrix} e^{-(t-t_0)} & 0 \\ 0 & e^{-(t-t_0)} \end{bmatrix} x_0 = [e^{-(t-t_0)} \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix} = 0$$

para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e $t \geq t_0$. Podemos separar quais são os estados observáveis e não observáveis com a próxima definição.

Definição 4. O núcleo da aplicação linear

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\rightarrow C([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n) \\ x_0 &\mapsto C(\cdot)\Phi_A(\cdot, t_0)x_0 \end{aligned}$$

é definido como o **subespaço não observável** do sistema (A, C) .

No próximo teorema veremos uma forma de computar o subespaço não observável sem ter que calcular a matriz fundamental do sistema.

Teorema 6. *Seja o sistema autônomo (A, C) e $N \subset \mathbb{R}^n$ o seu subespaço não observável. Temos que*

$$N = \bigcap_{k=0}^{n-1} \text{Ker}(CA^k)$$

Demonstração. Ver pgs. 33-34 de [2]. □

Exercício 5. Mostre que o subespaço não observável N do sistema (A, C) é o *maior* subespaço do espaço nulo de C que é invariante por A . Em outras palavras, mostre que:

(a) N está contido em $\text{Ker}(C)$: $N \subseteq \text{Ker}(C)$.

(b) N é invariante por A : Se $x \in N$, então $Ax \in N$.

(c) Suponha que S esteja contido em $\text{Ker}(C)$ e seja invariante por A . Mostre então que $S \subseteq N$.

Se o sistema (A, C) é observável, como reconstruir o estado inicial x_0 a partir da entrada u e da saída y ? Vejamos uma maneira possível no caso em que o sistema é autônomo no teorema a seguir.

Teorema 7. *Seja (A, C) um sistema linear observável em $[t_0, t_1]$. Temos que*

$$x_0 = [\bar{M}_o^T \bar{M}_o]^{-1} \bar{M}_o^T \tilde{y}_0,$$

onde $\bar{M}_o := M_o(A, C)$ e

$$\tilde{y}_0 := \begin{bmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Diferenciando $y(t) = Ce^{At}x_0$ e tomando $t = 0$ sucessivamente, obtemos

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x_0 = \begin{bmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) \end{bmatrix} =: \tilde{y}_0.$$

Uma solução de x_0 existe se \tilde{y}_0 estiver na imagem de \bar{M}_o . Como (A, C) é observável, \bar{M}_o tem posto pleno de colunas. Logo $\bar{M}_o^T \bar{M}_o$ é invertível e $x_0 = [\bar{M}_o^T \bar{M}_o]^{-1} \bar{M}_o^T \tilde{y}_0$. Note que a solução é única: se x_1 e x_2 são tais que $\bar{M}_o x_1 = \tilde{y}_0 = \bar{M}_o x_2$, temos que $\bar{M}_o(x_1 - x_2) = 0$. Mas como \bar{M}_o possui posto pleno, $\dim \text{Ker}(\bar{M}_o) = 0$, portanto $x_1 = x_2$. □

Observação. Note que a demonstração do Teorema 7 pode ser utilizado também para demonstrar a equivalência (1)-(5) do Teorema 5.

No caso em que o sistema é variante no tempo, podemos usar outra maneira para recuperar o estado inicial.

Teorema 8. *Seja $(A(t), C(t))$ um sistema linear variante no tempo observável em $[t_0, t_1]$. O núcleo de reconstrução do sistema é definido como*

$$R(t) := W_o(t_0, t_1)^{-1} \Phi_A^T(t, t_0) C^T(t), \quad t \in [t_0, t_1].$$

Temos que

$$x_0 = \int_{t_0}^{t_1} R(t) y(t) dt$$

Demonstração. Ver pg. 36 de [2]. □

Observação. Mesmo no caso em que o sistema é invariante no tempo, é preferível usar o método do Teorema 8 do que o método do Teorema 7 para reconstruir o estado numericamente. Na prática sempre há ruídos de medição na saída y . Esses ruídos são em geral ruídos de alta frequência, e portanto, são amplificados quando as derivadas de y são computadas no método do Teorema 7, mas são suavizados pela operação de integração do Teorema 8.

3.2 Observabilidade em tempo discreto

A definição de observabilidade para sistemas em tempo discreto é análogo ao caso do tempo contínuo: dados as seqüências (u_k) e (y_k) , queremos saber se é possível e como determinar a seqüência de estados (x_k) a partir delas.

Definição 5. O sistema (18) é dito observável se a aplicação linear

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\rightarrow (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}} \\ x_{k_0} &\mapsto C(k) \Phi(k, k_0) x_{k_0} \end{aligned}$$

que leva um estado inicial x_{k_0} à seqüência $k \mapsto C(k) \Phi(k, k_0) x_{k_0}$ é injetiva. Em outras palavras, se a seqüência $k \mapsto C(k) \Phi(k, k_0) x_{k_0}$ é identicamente nula (isto é, $C(k) \Phi(k, k_0) x_{k_0} = 0$ para todo $k \in \{k_0, k_0 + 1, \dots\}$), então $x_{k_0} = 0$.

Utilizando (16), podemos obter a seguinte relação:

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x_0 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ CB & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ CAB & CB & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ CA^{n-2}B & \cdots & CAB & CB & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{bmatrix} + D \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x_0 = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ CB & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ CAB & CB & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ CA^{n-2}B & \cdots & CAB & CB & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{bmatrix} - D \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Defina $\bar{M}_0 := \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & \cdots & (A^{n-1})^T C^T \end{bmatrix}^T$ (a expressão é a mesma da matriz de controlabilidade no caso contínuo e também definimos esta matriz como matriz de observabilidade do sistema (A, C)). Como o lado direito da última equação é conhecido, se $\text{rank} \bar{M}_0 = n$ é possível obter x_0 a partir de n medidas da

sequência y e da entrada u . De fato, como a matriz de observabilidade tem posto pleno de colunas, $\bar{M}_o^T \bar{M}_o$ é invertível. Multiplicando o lado esquerdo e o lado direito de (20) por $[\bar{M}_o^T \bar{M}_o]^{-1} \bar{M}_o^T$ é possível recuperar x_0 .

No caso em que as matrizes são variantes no tempo, podemos usar uma ferramenta análoga ao gramiano de observabilidade do tempo contínuo.

Teorema 9. *O sistema é observável se e somente se o gramiano de observabilidade dado por definido como*

$$W_o(k_0, n) := \sum_{k=k_0}^n \Phi_A^T(k, k_0) C^T(k) C(k) \Phi_A(k, k_0)$$

é não singular.

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned} x_{k_0}^T W_o(k_0, n) x_{k_0} &= x_{k_0}^T \left[\sum_{k=k_0}^n \Phi_A^T(k, k_0) C^T(k) C(k) \Phi_A(k, k_0) \right] x_{k_0} \\ &= \sum_{k=k_0}^n x_{k_0}^T \Phi_A^T(k, k_0) C^T(k) C(k) \Phi_A(k, k_0) x_{k_0} \\ &= \sum_{k=k_0}^n \|C(k) \Phi_A(k, k_0) x_{k_0}\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Suponha que o sistema não seja observável. Então existe $x_{k_0} \neq 0$ tal que $C(k) \Phi_A(k, k_0) x_{k_0} = 0$ para todo $k = k_0, k_0 + 1, \dots$. Mas isso significa que existe $x_{k_0} \neq 0$ tal que $x_{k_0}^T W_o(k_0, n) x_{k_0} = 0$, portanto $W_o(k_0, n)$ é singular. Por outro lado, se o sistema é observável, então $x_{k_0} \neq 0$ implica que $\sum_{k=k_0}^n \|C(k) \Phi_A(k, k_0) x_{k_0}\|^2 = x_{k_0}^T W_o(k_0, n) x_{k_0} > 0$. Como x_{k_0} pode ser tomado arbitrariamente em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, a matriz $W_o(k_0, n)$ é invertível. \square

Exemplo 10 (Modelo de aprendizado de DeGroot). Considere uma sociedade de n indivíduos onde todos tem uma opinião em um determinado assunto. Suponha que os indivíduos dessa sociedade só obtenham novas informações a partir dos outros indivíduos dessa sociedade. A influência que a opinião de um indivíduo i exerce em um indivíduo j é representada pela variável T_{ij} , cujo valor está no intervalo $[0, 1]$. Quanto maior o valor de T_{ij} , maior é a influência. Representando a opinião do indivíduo i no período k pela variável $p_i(k)$, cujo valor está no intervalo $[0, 1]$, temos que a evolução da opinião dos indivíduos pode ser modelada como o sistema dinâmico linear

$$p_{k+1} = T p_k,$$

onde $p_k = (p_1(k), \dots, p_n(k))$ e T é a matriz $[T]_{ij} = T_{ij}$. Podemos representar a matriz T por um grafo direcionado, onde os nós são os n indivíduos dessa sociedade e as arestas são formadas da seguinte forma: existe uma aresta saindo do nó para o i para o nó j com peso T_{ij} se $T_{ij} > 0$. Vejamos como aplicar o conceito de observabilidade neste modelo. Considere uma sociedade composta de 3 indivíduos ($n = 3$) e que

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A Figura 4 mostra o grafo representando a matriz T de influências.

Suponha que sabemos a opinião dos indivíduos 1 e 2, em todos os períodos de tempo, mas não sabemos a opinião do indivíduo 3. Saber a opinião dos indivíduos 1 e 2 significa que $y(k) = \begin{bmatrix} p_1(k) \\ p_2(k) \end{bmatrix}$, isto é,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

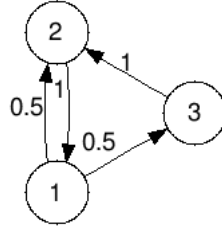


Figura 4: Grafo representando a matriz de influências do Exemplo 10.

Como a matriz de observabilidade

$$\begin{bmatrix} C \\ CT \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

possui posto igual a 3, é possível recuperar a opinião do indivíduo 3 resolvendo o sistema (20).

4 Controlabilidade

Dado um sistema de controle linear

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (21)$$

ou um sistema de controle linear em tempo discreto

$$x_{k+1} = A(k)x_k + B(k)u_k \quad (22)$$

vamos resolver o problema de determinar como e quando um estado específico pode ser atingido por um sistema a partir da escolha de uma estratégia de controle apropriada.

4.1 Controlabilidade em tempo contínuo

Definição 6. O sistema (21) é dito **controlável** em $[t_0, t_1]$ quando para todo par de estados $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ existir um controle $u \in L^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m)$ de forma que a solução do problema de valor inicial

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0$$

satisfaz $x(t_1) = x_1$.

Em outras palavras, se o sistema (A, B) é controlável em $[t_0, t_1]$, então dado qualquer par de estados $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $x_1 \in \mathbb{R}^n$ existe uma função $u : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que

$$x_1 = \Phi_A(t_1, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi_A(t_1, s)B(s)u(s) ds$$

Usaremos a notação $(t_0, x_0) \xrightarrow{u} (t_1, x_1)$ para denotar que a função u leva o estado x_0 no tempo t_0 até o estado x_1 no tempo t_1 . Conforme veremos no teorema a seguir, podemos fixar um dos pontos do par de estados x_0 e x_1 em 0 para checar a controlabilidade.

Teorema 10. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. O sistema (21) é controlável em $[t_0, t_1]$.
2. Para todo $x_1 \in \mathbb{R}^n$ existe uma função $u \in L^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m)$ satisfazendo $(t_0, 0) \xrightarrow{u} (t_1, x_1)$.
3. Para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existe uma função $u \in L^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m)$ satisfazendo $(t_0, x_0) \xrightarrow{u} (t_1, 0)$.

Demonstração. Ver pg. 55 de [2]. □

Observação. A propriedade (1) é chamada também de **controlabilidade total** ou **controlabilidade completa** (*complete controllability*). A propriedade (2) é chamada de **alcançabilidade completa** (*complete reachability*). Quando o sistema possui essa propriedade, dizemos que o sistema é alcançável ou atingível. A propriedade (3) é chamada de **controlabilidade ao zero** (*controllability to zero*). Quando o sistema possui essa propriedade, dizemos que o sistema é controlável ao zero (ou para o zero).

Teorema. *Dado o sistema linear de controle $(A(t), B(t), \cdot, \cdot)$, são equivalentes as afirmações:*

1. O sistema $(A(t), B(t), \cdot, \cdot)$ é controlável em $[t_0, t_1]$.
2. O **gramiano de alcançabilidade** (*reachability Gramian*) definido como

$$W_r(t_0, t_1) := \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, s)B(s)B^T(s)\Phi^T(t_1, s) ds$$

é não singular.

Demonstração.

(1) \implies (2) Vamos mostrar que se (A, B) é controlável em $[t_0, t_1]$ então $x^T W_r(t_0, t_1)x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ diferente de 0. Isso significa que $\ker W_r(t_0, t_1) = \{0\}$. Como $x^T W_r(t_0, t_1)x \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, basta demonstrar que se $x \neq 0$, então $x^T W_r(t_0, t_1)x > 0$.

Considere $x_1 \in \mathbb{R}^n$ arbitrário e diferente de 0. Como o sistema (A, B) controlável, existe $u \in L^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m)$ tal que $(t_0, 0) \xrightarrow{u} (t_1, x_1)$. Note que

$$\begin{aligned} \|x_1\|^2 &= x_1^T x_1 \\ &= x_1^T \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, s) B(s) u(s) ds \\ &= \int_{t_0}^{t_1} x_1^T \Phi(t_1, s) B(s) u(s) ds \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [B^T(s) \Phi^T(t_1, s) x_1]^T u(s) ds \end{aligned}$$

Portanto se $x_1 \neq 0$, então $B(t)^T \Phi^T(t_1, t) x_1 \neq 0$ para todo $t \in [t_0, t_1]$. Como

$$x_1^T W_r(t_0, t_1) x_1 = \int_{t_0}^{t_1} \|B^T(t) \Phi^T(t_1, t) x_1\|^2 dt,$$

temos que se $x_1 \neq 0$, então $x_1^T W_r(t_0, t_1) x_1 > 0$.

(2) \implies (1) Seja $x_1 \in \mathbb{R}^n$. Como $W_r(t_0, t_1)$ é não singular, existe a inversa $W_r^{-1}(t_0, t_1)$. Defina

$$u(t) := B^T(t) \Phi^T(t_1, t) W_r^{-1}(t_0, t_1) z_1, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Temos que

$$\Phi(t_1, t_0) 0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, s) B(s) u(s) ds = W_r(t_0, t_1) W_r^{-1}(t_0, t_1) x_1 = x_1$$

Provamos que para qualquer x_1 existe u tal que $(t_0, 0) \mapsto (t_1, z_1)$, isto é, o sistema é alcançável. Pelo Teorema 10, temos que o sistema (A, B, \cdot) é controlável. \square

A semelhança entre o gramiano de alcançabilidade e do gramiano de observabilidade permite concluir uma relação muito importante entre o problema de controlabilidade e observabilidade, como será demonstrado no próximo teorema.

Teorema 11 (Teorema da dualidade). *Dado o sistema linear de controle (A, B, \cdot) são equivalentes as afirmações:*

1. (A, B, \cdot) é controlável em $[t_0, t_1]$.
2. $(-A^T, \cdot, B^T)$ é observável em $[t_0, t_1]$.

*Dizemos que o sistema $(-A^T, \cdot, B^T)$ é o **sistema dual** do sistema (A, B, \cdot) .*

O teorema da dualidade permite transformar o problema de controlabilidade de um sistema linear em um problema de observabilidade do sistema dual, e vice-versa. Aplicando o Teorema 5 no sistema dual, obtemos os seguintes critérios para a caracterização de controlabilidade de um sistema autônomo.

Teorema 12. *Seja (A, B, \cdot) um sistema de controle autônomo. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. O sistema (A, B, \cdot) é controlável em $[0, T]$ para todo $T > 0$.
2. O sistema (A, B, \cdot) é controlável em $[0, T]$ para algum $T > 0$.

3. A matriz $W_T = \int_0^T e^{-sA} B B^T e^{-sA^T} ds$ é não singular para algum $T > 0$.

4. A matriz $W_T = \int_0^T e^{-sA} B B^T e^{-sA^T} ds$ é não singular para todo $T > 0$.

5. A **matriz de controlabilidade** definida como a matriz $n \times mn$ dada por

$$M_c(A, B) := [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

possui posto pleno (isto é, todas as linhas da matriz de controlabilidade são linearmente independentes).

6. A dimensão do subespaço $\mathcal{R} := \text{Im}(B) + A\text{Im}(B) + \dots + A^{n-1}\text{Im}(B)$ é n .

O subespaço \mathcal{R} do Teorema 12 é justamente o conjunto de lugares possíveis que os estados podem atingir aplicando qualquer controle admissível.

Definição 7. O subespaço atingível do sistema $(A, B, ,)$ é definido como

$$\mathcal{R} := \text{Im}(B) + A\text{Im}(B) + \dots + A^{n-1}\text{Im}(B).$$

Exercício 6. Mostre que o subespaço atingível \mathcal{R} do sistema $(A, B, ,)$ é o menor subespaço invariante por A que contém $\text{Im}(B)$. Em outras palavras, mostre que:

(a) \mathcal{R} contém $\text{Im}(B)$.

(b) \mathcal{R} é invariante por A : Se $x \in \mathcal{R}$, então $Ax \in \mathcal{R}$.

(c) Suponha que S contém $\text{Im}(B)$ e seja invariante por A . Mostre então que $\mathcal{R} \subseteq S$.

Se o sistema $(A(t), B(t), ,)$ é controlável, existe um controle u que leva o sistema do estado inicial x_0 em t_0 para o estado final x_1 em t_1 . Vejamos no próximo teorema como construir explicitamente esse controle u .

Teorema 13. Seja $(A(t), B(t), ,)$ um sistema de controle controlável em $[t_0, t_1]$. Temos que o controle

$$\bar{u}(t) := -B^T(t)\Phi_A^T(t_1, s)W_r^{-1}(t_0, t_1)[\Phi_A(t_1, t_0)x_0 - x_1], \quad t \in [0, T] \quad (23)$$

satisfaz

$$(t_0, x_0) \xrightarrow{\bar{u}} (t_1, x_1). \quad (24)$$

Mais ainda, entre todos os controles que satisfazem (24), \bar{u} é o que minimiza o funcional quadrático

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} |u(t)|^2 dt$$

Demonstração. Ver pgs.51-53 de [2]. □

Corolário 2. Seja $(A, B, ,)$ um sistema de controle autônomo e $T > 0$. Temos que

$$u(t) = -B^T e^{A^T(T-t)} W_r^{-1}(0, T)(e^{AT} x_0 - x_1), \quad t \in [0, T] \quad (25)$$

satisfaz $(0, x_0) \xrightarrow{\bar{u}} (T, x_1)$.

Observação. Note que na prática nem sempre é possível utilizar o controle (23) devido à limitações físicas: o mecanismo que realiza a entrada de controle pode estar limitado a trabalhar numa região de operação específica. Por exemplo, se a entrada de controle for realizada por um gerador de tensão, este não poderá gerar uma tensão acima de um valor nominal. No próximo exercício vamos ver como o valor máximo do módulo da entrada de controle se relaciona com o intervalo de tempo desejado para se mover o estado inicial para o estado final.

Exercício 7. Seja $a, b \in \mathbb{R}$ e considere o sistema (a, b, \cdot) . Se u é a entrada de controle dada por (25), mostre que

$$u(t) = -\frac{2ae^{a(T-t)}}{b(e^{2aT} - 1)}(e^{aT}x_0 - x_1)$$

e que se $a > 0$,

$$\max_{t \in [0, T]} |u(t)| = \left| \frac{2a(e^{aT}x_0 - x_1)}{b(e^{2aT} - 1)} \right| e^{aT}$$

e que se $a < 0$,

$$\max_{t \in [0, T]} |u(t)| = \left| \frac{2a(e^{aT}x_0 - x_1)}{b(e^{2aT} - 1)} \right|$$

4.2 Controlabilidade em tempo discreto

A definição de controlabilidade para sistemas em tempo discreto é análoga à definição para sistemas em tempo contínuo.

Definição 8. O sistema (22) é dito **controlável** no horizonte de tempo k_0, \dots, k_N quando para todo par de estados $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ existir uma sequência (u_k) de forma que a recorrência

$$x_{k+1} = A(k)x_k + B(k)u_k, \quad x_{k_0} = x_0$$

satisfaz $x_{k_1} = x_1$.

É importante notar que o Teorema 10 não é mais válido no contexto de sistemas em tempo discreto: o problema é que nem sempre a matriz de transição de estados no caso discreto é invertível.

Os duais dos resultados obtidos anteriormente para observabilidade para tempo discreto também podem ser obtidos pelo Teorema 11.

5 Estabilidade

Nesta aula, vamos tratar da estabilidade de sistemas lineares invariantes no tempo. Primeiramente, vamos lembrar o conceito de estabilidade de uma equação diferencial/de diferenças ordinária geral e depois particularizar para o caso linear.

5.1 Estabilidade em tempo contínuo

5.1.1 Estabilidade de equações diferenciais ordinárias

Considere a equação diferencial

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \tag{26}$$

com $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ localmente Lipschitz em D . Com essas hipóteses, sempre existe uma solução local para o problema de valor inicial

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0$$

que pode ser prolongada a um intervalo máximo de existência $[0, \omega(x_0))$ dependendo possivelmente de x_0 . Isto é, sempre existe uma função diferenciável $x : [0, \omega(x_0)) \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(t) = f(x(t))$ para todo $t \in [0, \omega(x_0))$.

Definição 9. Dizemos que \bar{x} é **ponto de equilíbrio** de (26) se $\bar{x} \in \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}$. Se existe um $r > 0$ tal que a bola aberta com centro em \bar{x} não contenha outros pontos de equilíbrios diferente de \bar{x} , dizemos que \bar{x} é um **ponto de equilíbrio isolado**.

Note que qualquer solução começando em um ponto de equilíbrio \bar{x} permanece no ponto de equilíbrio durante todo o tempo. Podemos classificar a estabilidade de um ponto equilíbrio de acordo com as soluções próximas desse ponto de equilíbrio.

Definição 10. Seja \bar{x} um ponto de equilíbrio isolado de (26) e suponha que as soluções de (26) possam ser prolongadas para todo $t \geq 0$.⁵

- Dizemos que \bar{x} é **estável** (no sentido de Lyapunov) se para toda vizinhança U de \bar{x} existe uma vizinhança $V \subseteq U$ de \bar{x} tal que toda solução $x(t)$ com valor inicial $x(0) \in V$ permanece em U para todo $t \geq 0$.
 - Dizemos que \bar{x} é **atrativo** se existe uma vizinhança U de \bar{x} tal que para toda solução $x(t)$ com valor inicial $x(0) \in U$, temos que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}$
 - Dizemos que \bar{x} é **assintoticamente estável** quando é simultaneamente estável e atrativo.
 - Dizemos que \bar{x} é **instável** quando \bar{x} não é estável.

É importante notar que as propriedades de instabilidade e atratividade de um ponto de equilíbrio não são mutuamente exclusivas⁶. Vejamos o porquê no próximo exemplo.

Exemplo 11. [3, p.58] Conforme ilustra a Figura 5, o sistema autônomo

$$\dot{r} = r(1-r), \quad \dot{\theta} = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

possui os pontos de equilíbrio $(0, 0)$ e $(1, 0)$. O ponto $(1, 0)$ é atrativo, no entanto, sempre há uma trajetória contida em $r = 1$ em uma vizinhança de $(1, 0)$ violando a condição de estabilidade de $(1, 0)$. Portanto, $(1, 0)$ é atrativo e instável ao mesmo tempo.

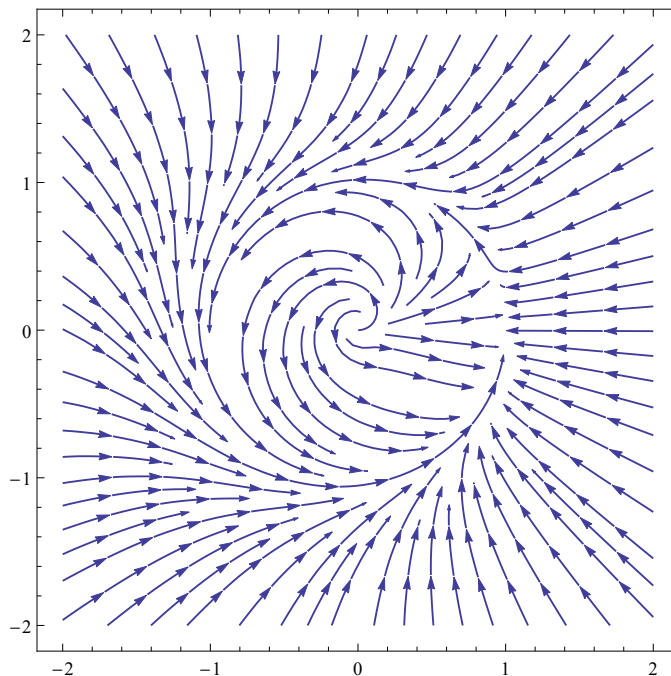


Figura 5: Exemplo de [3, p.58].

Sem perdas de generalidade, podemos sempre assumir que o ponto de equilíbrio é 0. Vejamos o porquê: suponha que $\bar{x} \neq 0$ e considere a troca de variáveis $y := x - \bar{x}$. A derivada de y é dada por

$$\dot{y} = \dot{x} = f(x) = f(y + \bar{x}) =: g(y),$$

onde $g(0) = 0$. Na nova variável y , o sistema tem um ponto de equilíbrio em 0. Vejamos agora nas próximas seções como analisar em particular a estabilidade de sistemas lineares autônomos. Para o leitor interessado no caso de sistemas lineares variantes no tempo, recomenda-se a leitura de [1, pgs.113-117], e para sistemas não-lineares em geral, [9, Cap. 4].

5.1.2 Estabilidade de sistemas lineares autônomos em tempo contínuo

Considere o sistema linear autônomo em tempo contínuo dado por

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0. \quad (27)$$

Note que pelo teorema de Picard-Lindelöf, sempre existe solução para (27) e esta pode ser prolongada indefinidamente (isto é, o intervalo máximo de existência de qualquer solução é $[0, \infty)$). Vamos assumir que A é invertível, isto é, 0 é o único ponto de equilíbrio de (27). Na primeira aula, vimos que a solução de (27) é dada por

$$x(t) = e^{At}x_0. \quad (28)$$

Vamos mostrar agora um procedimento para computar a exponencial da matriz tA . Existe uma matriz P tal que $P^{-1}AP = J$, onde J é a forma canônica de Jordan de A . Temos então que

$$e^{tA} = e^{tPJP^{-1}} = I + tPJP^{-1} + \frac{t^2PJ^2P^{-1}}{2!} + \dots = P \left(I + tJ + \frac{t^2J^2}{2!} + \dots \right) P^{-1} = Pe^{tJ}P^{-1}.$$

⁵Note que essa hipótese não é garantida se consideramos apenas que f é localmente Lipschitz. Mais detalhes podem ser vistos em [9].

⁶Embora isso seja válido no caso em que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Para computar e^{tJ} , pode-se utilizar (47) para calcular a exponencial de cada bloco de Jordan $J_\ell(\lambda_i)$ de dimensão $m \times m$ como

$$e^{tJ_\ell(\lambda_i)} = \begin{bmatrix} e^{t\lambda_i} & te^{t\lambda_i} & \dots & \frac{t^{(m-1)}e^{t\lambda_i}}{(m-1)!} \\ 0 & e^{t\lambda_i} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & te^{t\lambda_i} \\ 0 & 0 & \dots & e^{t\lambda_i} \end{bmatrix} \quad (29)$$

e usar (29) em cada bloco de Jordan de e^{tJ} .

Note que por (29), se todo autovalor de A tem parte real estritamente negativa, então $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$, porém se A possui algum autovalor com parte real estritamente positiva, então $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty$. No caso que um dos autovalores possui parte real igual a 0, então os blocos de Jordan associados a este autovalor só terão termos limitados se as dimensões do bloco forem 1. Note que isso só ocorre se a multiplicidade geométrica deste autovalor é igual a multiplicidade algébrica deste autovalor (isto é, o autovalor é semi-simples). Podemos resumir essas conclusões no próximo teorema.

Teorema 14. *Dado o sistema autônomo $\dot{x} = Ax$, o ponto de equilíbrio 0 é estável se e somente se todos os autovalores de A possuem parte real não-negativa, e para todo autovalor com parte real igual 0 e com multiplicidade algébrica maior ou igual a 2 é semi-simples. O ponto de equilíbrio é assintoticamente estável se todos os autovalores possuem parte real estritamente negativa, e é instável se possui ao menos um autovalor com parte real estritamente positiva.*

Pelo Teorema 14, a estabilidade da solução de (28) está intrinsecamente relacionada com os autovalores da matriz A que define as equações diferenciais. É interessante notar que isto não generaliza de maneira trivial para sistemas lineares variantes no tempo, conforme pode ser visto no próximo exemplo.

Exemplo 12. [4, Exemplo 5.5] Considere o sistema linear dado por

$$\dot{x} = A(t)x = \begin{bmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x.$$

Temos que o polinômio característico de $A(t)$ é

$$\det \begin{bmatrix} \lambda + 1 & -e^{2t} \\ 0 & \lambda + 1 \end{bmatrix} = (\lambda + 1)^2$$

e portanto que $A(t)$ possui autovalores -1 e -1 para todo $t \in \mathbb{R}$. No entanto, pode-se verificar que a matriz de transição de estados desse sistema é dada por

$$\Phi(t, 0) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0.5(e^t - e^{-t}) \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

e como o elemento (1, 2) cresce sem limites, o sistema não é estável.

Vale a pena mencionar que para caracterizar a estabilidade de sistema lineares variantes no tempo, podemos usar o conceito de expoentes de Lyapunov (ver [1, pgs.113-117]), que no caso particular em que o sistema é invariante no tempo, recaem para a parte real dos autovalores de A .

5.2 Estabilidade em tempo discreto

5.2.1 Estabilidade de recorrências

No caso em que o sistema é de tempo discreto, considere um sistema de recorrências dado por

$$x_{k+1} = f(x_k). \quad (30)$$

Dizemos que \bar{x} é **ponto de equilíbrio** de (30) se \bar{x} é ponto fixo de (30), isto é, se $\bar{x} = f(\bar{x})$. Se existe um $r > 0$ tal que a bola aberta com centro em \bar{x} não contenha outros pontos de equilíbrios diferente de \bar{x} , dizemos que \bar{x} é um **ponto de equilíbrio isolado**.

Definição 11. Seja \bar{x} um ponto de equilíbrio isolado de (30).

- Dizemos que \bar{x} é **estável** (no sentido de Lyapunov) se para toda vizinhança U de \bar{x} existe uma vizinhança $V \subseteq U$ de \bar{x} tal que toda solução (x_k) com valor inicial $x_0 \in V$ permanece em U para todo $k \in \mathbb{N}$.
 - Dizemos que \bar{x} é **atrativo** se existe uma vizinhança U de \bar{x} tal que para toda solução (x_k) com valor inicial $x_0 \in U$, temos que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x}$
 - Dizemos que \bar{x} é **assintoticamente estável** quando é simultaneamente estável e atrativo.
 - Dizemos que \bar{x} é **instável** quando \bar{x} não é estável.

5.2.2 Estabilidade de sistemas lineares autônomos em tempo discreto

Considere o sistema linear autônomo em tempo discreto dado por

$$x_{k+1} = Ax_k, \quad (31)$$

Vamos assumir novamente que $(I - A)$ é invertível, isto é, 0 é o único ponto de equilíbrio de (31). Na primeira aula, vimos que a solução de (31) é dada por

$$x_k = A^k x_0 \quad (32)$$

Seja P tal que $P^{-1}AP = J$, onde J é a forma canônica de Jordan de A . Substituindo esta última expressão em (32) obtemos

$$x_k = (PJP^{-1})^k x_0 = \underbrace{(PJP^{-1}) \cdots (PJP^{-1})}_{k \text{ vezes}} x_0 = PJ^k P^{-1} x_0$$

Para computar J^k , pode-se utilizar (44) para calcular cada bloco de Jordan $J_\ell(\lambda_i)$ de dimensão $m \times m$ como

$$J_\ell^k(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i^k & \binom{k}{1} \lambda_i^{k-1} & \cdots & \binom{k}{m-1} \lambda_i^{k-m+1} \\ 0 & \lambda_i^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \binom{k}{1} \lambda_i^{k-1} \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i^k \end{bmatrix}.$$

Note que por (29), se todo autovalor de A tem módulo menor que 1, então $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$, porém se A possui algum autovalor com módulo maior que 1, então $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \infty$. No caso que um dos autovalores possuir módulo unitário, então os blocos de Jordan associados a este autovalor só terão termos limitados se as dimensões do bloco forem 1. Note que isso só ocorre se o autovalor é semi-simples.

No próximo exercício vamos ver uma aplicação interessante onde os pontos de equilíbrio não são isolados.

Exercício 8. Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e suponha que $I - A$ não seja invertível. Neste caso, os pontos de equilíbrio de A estão todos no subespaço $\text{Ker}(I - A)$. Note ainda que nenhum ponto de equilíbrio é isolado, portanto não poderemos usar os resultados estabelecidos anteriormente.

- (a) Prove que A possui um autovalor em 1.
- (b) Mostre que A é estocástica (isto é, a soma de cada linha de A é igual a 1) se e somente se $\text{Ker}(I - A) = \{\alpha \mathbf{1} : \alpha \in \mathbb{R}\}$, onde $\mathbf{1}$ é o vetor $(1, 1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$.
- (c) Assumindo que 1 seja o único autovalor de A no círculo unitário e que 1 seja semi-simples, mostre que $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k$ converge para uma matriz L tal que $\text{Im}(L) = \text{Ker}(I - A)$.
- (d) Considere o modelo de aprendizado de DeGroot do Exemplo 10. Se as condições das hipóteses do item (c) são válidas, o que isso significa?

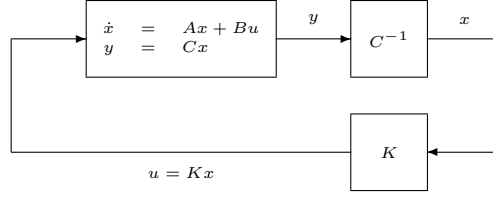


Figura 6: Controle por realimentação de estados

6 Estabilização e estimação

Neste problema trataremos alguns resultados de estabilização e estimação para sistemas em tempo contínuo. As construções para sistemas em tempo discreto são análogas. Para mais detalhes, o leitor pode consultar [5].

6.1 Controle por realimentação de estados

Se o sistema (A, B, \cdot) for controlável, vimos que podemos escolher um controle u que leva qualquer estado inicial x_0 para 0 em um intervalo de tempo finito T . E o que fazer se quisermos controlar também o comportamento dos estados durante todo o intervalo de tempo $[0, T]$? Uma ideia é controlar os autovalores da matriz A aproveitando a entrada de controle u .

Considerando que podemos medir todos os estados do sistema (isto é, vamos assumir que a matriz C é invertível), podemos escolher $u = Kx$ como entrada (ver Figura 6). Neste caso, temos que

$$\dot{x} = Ax + Bu = (A + BK)x \quad (33)$$

e a pergunta que surge agora é como escolher a matriz K de modo a obter um comportamento desejado para os estados de (33)?

6.1.1 Alocação de autovalores para sistemas com apenas uma entrada

Se o sistema (A, B, \cdot) for controlável, vamos ver que podemos escolher arbitrariamente os autovalores da matriz $A + BK$ em função de K . Nesse caso, dizemos que podemos alocar arbitrariamente os autovalores do sistema (A, B, \cdot) . Vamos tratar primeiro o caso em que o sistema só tem uma entrada, isto é, $B = b \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ e $K = k^T \in \mathbb{R}^{1 \times n}$. Nesse caso há dois métodos clássicos para realizar a alocação de autovalores.

1º método: Forma canônica controlável

Para usar esse método é necessário introduzir o seguinte teorema.

Teorema 15. *Se (A, b, \cdot) é controlável, então existe uma matriz $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que o sistema $\tilde{A} = T^{-1}AT$, $\tilde{b} = T^{-1}b$ assume a seguinte forma:*

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

e o polinômio característico p de A é dado por $p(\lambda) = \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i$.

Demonstração. Ver pgs. 105-107 de [2]. □

Dizemos que $(\tilde{A}, \tilde{b}, \cdot)$ é a **forma canônica controlável** do sistema (A, b, \cdot) . Vejamos agora como usar o Teorema 15 para resolver o problema de alocação de autovalores: primeiro para a forma canônica controlável do sistema e a partir disso, para o sistema original.

Considere um sistema (A, b, \cdot) e que desejamos alocar os autovalores de $A + bk^T$ em $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Pelo Teorema 15, existe T tal que $T^{-1}AT = \tilde{A}$ e $\tilde{b} = T^{-1}b$. Defina $\tilde{k} := T^T k$. Resolveremos primeiro o problema de alocação de autovalores para a matriz $\tilde{A} + \tilde{b}\tilde{k}^T$. O polinômio mônico cujas raízes são $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ é dado por

$$\Delta_D(x) = x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \dots + \alpha_1x + \alpha_0,$$

onde os coeficientes α_i ($i = 1, \dots, n$) de Δ_D são obtidos usando as fórmulas de Vieta, isto é,

$$\alpha_i = (-1)^{n-i} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}.$$

Escolhendo $\tilde{k}^T = [-\alpha_0 + a_0 \quad -\alpha_1 + a_1 \quad \dots \quad -\alpha_{n-1} + a_{n-1}]$, temos que o polinômio característico de $\tilde{A} + \tilde{b}\tilde{k}^T$ é exatamente Δ_D . Logo os autovalores de $\tilde{A} + \tilde{b}\tilde{k}^T$ são $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Como

$$\tilde{A} + \tilde{b}\tilde{k}^T = T^{-1}AT + T^{-1}bk^T T = T^{-1}(A + bk)T,$$

temos que os autovalores de $A + bk$ são os mesmos autovalores de $\tilde{A} + \tilde{b}\tilde{k}^T$. Portanto, escolhendo $u = k^T x$ com $k = T^{-T}\tilde{k}$ obtemos o resultado desejado.

2º método: Fórmula de Ackermann

Um outro método para alocar os autovalores da matriz $A + bk^T$ nos autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ especificados é por meio da fórmula de Ackermann. Suponha que o polinômio mônico cujas raízes sejam esses autovalores seja dado por

$$\Delta_D(x) := x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \dots + \alpha_1x + \alpha_0$$

Teorema 16. *A seguinte identidade é válida:*

$$\Delta_D(A + bk^T) = \Delta_D(A) + [b \quad Ab \quad \dots \quad A^{n-1}b] \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} \quad (35)$$

onde $L_1, \dots, L_{n-1} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ e $L_n = k^T$.

Demonstração. Defina $A_{CL} := A + bk^T$. Temos que

$$\Delta_D(A_{CL}) = (A_{CL})^n + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i (A_{CL})^{i-1}. \quad (36)$$

Calculando as potências de A_{CL} obtemos

$$\begin{aligned} A_{CL}^0 &= (A + bk^T)^0 = I, \\ A_{CL}^1 &= (A + bk^T)^1 = A + bk^T, \\ A_{CL}^2 &= (A + bk^T)^2 = A^2 + Abk^T + bk^T(A + bk^T), \\ &\vdots \\ A_{CL}^n &= (A + bk^T)^n = A^n + A^{n-1}bk^T + A^{n-2}bk^T A_{CL} + \dots + bk^T A_{CL}^{n-1}. \end{aligned} \quad (37)$$

Substituindo (37) em (36), obtemos

$$\begin{aligned}\Delta_D(A_{CL}) &= (A^n + A^{n-1}bk^T + A^{n-2}bk^T A_{CL} + \cdots + bk^T A_{CL}^{n-1}) + \cdots \\ &\quad + \alpha_2(A^2 + Abk^T + bk^T A_{CL}) + \alpha_1(A + bk^T) + \alpha_0 I\end{aligned}$$

Rearranjando os termos,

$$\begin{aligned}\Delta_D(A_{CL}) &= \underbrace{(A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \cdots + \alpha_2 A^2 + \alpha_1 A + \alpha_0 I)}_{\Delta_D(A)} + \cdots \\ &\quad + (A^{n-1}bk^T + A^{n-2}bk^T A_{CL} + \cdots + bk^T A_{CL}^{n-1}) + \cdots + \alpha_1(bk^T)\end{aligned}$$

Finalmente, reescrevendo a equação acima como um produto matricial e notando que o termo $A^{n-1}b$ apenas multiplica k^T , obtemos (35). \square

Se desejarmos que o polinômio característico de $A + bk^T$ seja Δ_D , temos que $\Delta_D(A + bk^T) = 0$ pelo teorema de Cayley-Hamilton. Por (35), isto implica que

$$\Delta_D(A) = \begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}.$$

Supondo que (A, b, \cdot) seja controlável, então $\begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix}$ é invertível (pois é a matriz de controlabilidade do sistema – ver Teorema 12) e portanto

$$\begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix}^{-1} \Delta_D(A) = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ k^T \end{bmatrix}$$

Multiplicando ambos os lados dessa última equação pelo vetor $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$, obtemos

$$k^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix}^{-1} \Delta_D(A)$$

6.1.2 Alocação de autovalores para sistemas com várias entradas

E no caso do sistema ter mais de uma entrada? Podemos recair no caso de apenas uma entrada usando o próxima lema, conhecido na literatura como o lema de Heymann.

Lema 1 (Lema de Heymann). *Seja $v \in \mathbb{R}^m$ tal que $b := Bv \neq 0$. Se (A, B, \cdot) é controlável, então existe $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que $(A + BF, b, \cdot)$ é controlável.*

Suponha que (A, B, \cdot) é controlável. Pelo lema de Heymann, existe F tal que $(A + BF, b, \cdot)$ é controlável. Pelos resultados anteriores existe uma f tal que podemos alocar os autovalores de $A + BF + bf$ arbitrariamente. Como $A + BF + bf = A + BF + Bvf = A + B(F + vf)$, podemos alocar arbitrariamente os autovalores de (A, B, \cdot) usando a entrada de controle $u = (F + vf)x$. Vamos demonstrar agora o lema de Heymann.

Demonstração. Considere uma sequência de vetores x_1, x_2, \dots, x_k satisfazendo $x_1 = b$ e $x_{i+1} = Ax_i + Bu_i$, ($i = 1, \dots, k-1$) onde u_i é escolhido de tal modo que x_{i+1} seja linearmente independente de x_1, \dots, x_i . Suponha que k seja o **maior inteiro** tal que a sequência x_1, x_2, \dots, x_k seja linearmente independente. Vamos provar que $k = n$. Considere o espaço vetorial \mathcal{L} gerado por x_1, x_2, \dots, x_k . Como k é o maior inteiro possível, temos que para todo $u \in \mathbb{R}^m$

$$Ax_k + Bu \in \mathcal{L}$$

pois caso contrário existiria um vetor u_k tal que $x_{k+1} := Ax_k + Bu_k$ é linearmente independente de x_1, \dots, x_k , contradizendo a maximalidade de k .

Para todo $u \in \mathbb{R}^m$ temos que $Ax_k + Bu \in \mathcal{L}$. Em particular, para $u = 0$, $Ax_k \in \mathcal{L}$. Como \mathcal{L} é um espaço vetorial, temos também que

$$Bu = \underbrace{Ax_k + Bu}_{\in \mathcal{L}} - \underbrace{Ax_k}_{\in \mathcal{L}} \in \mathcal{L}$$

para todo $u \in \mathbb{R}^m$. Em outras palavras, $\text{Im}(B) \subseteq \mathcal{L}$. Pela construção da sequência (x_k) , temos para $i = 1, \dots, k-1$ que

$$Ax_i = \underbrace{x_{i+1}}_{\in \mathcal{L}} - \underbrace{Bu_i}_{\in \mathcal{L}} \in \mathcal{L}$$

ou seja, $A\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}$. O subespaço atingível \mathcal{R} é o menor subespaço invariante por A que contém $\text{Im}(B)$ (ver Exercício 6). Logo $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}$ e, daí temos que $\underbrace{\dim \mathcal{R}}_{=n} \leq \underbrace{\dim \mathcal{L}}_{=k} \leq n$. Defina F com $Fx_i = u_i$ ($i = 1, \dots, n-1$) e Fx_n arbitrário. Logo $[x_1 \ (A+BF)x_1 \ \dots \ (A+BF)^n x_1] = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$. \square

Embora pela demonstração do lema de Heynmann é possível achar explicitamente uma matriz F tal que $(A+BF, b, \cdot)$ seja controlável, pode-se utilizar também um método não determinístico para achar uma F tal que $(A+BF, b, \cdot)$ seja controlável. Para isso, vejamos antes o seguinte teorema.

Teorema 17. *Fixe m e n inteiros. Considere o conjunto*

$$\Sigma := \{(A, B, \cdot) : A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}\}$$

identificado com o espaço \mathbb{R}^{n^2+nm} listando todos os coeficientes de A e B em uma ordem fixa. Seja

$$\Sigma_C := \{(A, B, \cdot) : \text{tal que } (A, B, \cdot) \text{ é controlável}\}.$$

O complemento do conjunto Σ_C em Σ tem medida (de Lebesgue) nula. Isto significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe uma sequência $(a_k) \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$S \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(a_k - \frac{\varepsilon}{2^k} \mathbf{1}, a_k + \frac{\varepsilon}{2^k} \mathbf{1} \right),$$

onde $\mathbf{1}$ é o vetor coluna $(1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$. Em outras palavras, $\Sigma \setminus \Sigma_C$ está contido em um conjunto de volume arbitrariamente pequeno.

Demonstração. O complemento de Σ_C em Σ é dado por

$$\Sigma_U := \{(A, B, \cdot) : \text{rank} M_C(A, B) < n\}.$$

Para uma matriz M arbitrária temos que $\text{rank}(M) = \text{rank}(M^T M)$, logo $\text{rank} M_C(A, B) < n$ se e somente se

$$\text{rank} [M_C^T(A, B) M_C(A, B)] < n,$$

ou seja, se e somente se

$$\det \left(\begin{bmatrix} B^T \\ B^T A^T \\ \vdots \\ B^T (A^T)^{n-1} \end{bmatrix} [B \ AB \ \dots \ A^{n-1} B] \right) =$$

$$\det \begin{bmatrix} B^T B & B^T A B & \dots & B^T A^{n-1} B \\ B^T A^T B & B^T A^T A B & \dots & B^T A^T A^{n-1} B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ B^T (A^T)^{n-1} B & B^T (A^T)^{n-1} A B & \dots & B^T (A^T)^{n-1} (A)^{n-1} B \end{bmatrix} = 0$$

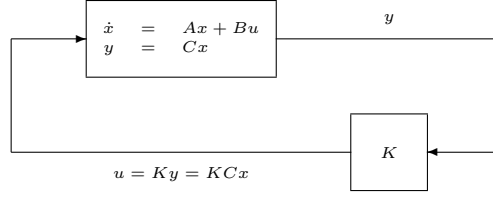


Figura 7: Controle por realimentação de saída

Isto implica que Σ_U é um conjunto dado pelos zeros de um polinômio nas $n^2 + nm$ variáveis de Σ . Seja $p : \mathbb{R}^{n^2+nm} \rightarrow \mathbb{R}$ tal polinômio. Pelo Lema 2 do apêndice, $p^{-1}(\{0\})$ possui medida nula ou $p^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R}^{n^2+nm}$. Mas se $p^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R}^{n^2+nm}$, então $\Sigma_U = \mathbb{R}^{n^2+nm}$ contradizendo que $\Sigma_C \neq \emptyset$ (note que sempre podemos construir uma matriz controlável usando (34)). \square

Pelo resultado do Teorema 17, podemos usar um gerador de números aleatórios e escolher uma F aleatoriamente de tal modo que $(A + BF, b, \cdot)$ é controlável e usar os métodos vistos anteriormente para alocar autovalores.

Observação. Mesmo que $(A + BF, b, \cdot)$ seja controlável, pode ser o caso do sistema $(A + BF, b, \cdot)$ estar próximo de um sistema não controlável, no sentido que o gramiano de controlabilidade do sistema esteja perto de ser singular fazendo com que o esforço de controle seja muito grande (ver Teorema 13). Portanto é interessante amostrar F de um conjunto de matrizes que possuem um número de condicionamento pequeno⁷.

Exercício 9. Mostre que Σ_C é aberto e denso em Σ . Isso significa que podemos sempre aproximar um sistema qualquer por uma sequência de sistemas controláveis. *Dica:* Ver [12, p. 97].

6.1.3 Estabilização por realimentação de estados

No problema de alocação de autovalores, queríamos colocar os autovalores do sistema em qualquer lugar do plano complexo. E se quisermos apenas estabilizar o sistema? Basta que os autovalores do sistema em malha fechada esteja no semiplano à esquerda.

Definição 12. Se existe K tal que o sistema em malha fechada $(A + BK, B, \cdot)$ seja estável, então o par (A, B, \cdot) é dito **estabilizável**.

Neste caso, (A, B, \cdot) ser controlável não é mais necessário (apesar de ser suficiente).

Exemplo 13. O sistema $(A, 0, \cdot)$ com A matriz estável é sempre **estabilizável**, mas não é **controlável**.

Exercício 10. O sistema (A, B, \cdot) é controlável se e somente se (A, B, \cdot) e $(-A, -B, \cdot)$ são estabilizáveis.

6.2 Controle por realimentação de saída

Nos problemas anteriores foi assumido que a matriz C é invertível, isto é, podemos medir todos os estados do sistema diretamente. E se tivermos acesso somente à saída do sistema? Realimentando diretamente a saída no controlador obtemos que o sistema em malha fechada é $A + BKC$ (Ver Figura 7).

6.2.1 Controle direto por realimentação de saída

O problema desta abordagem é que mesmo com o sistema (A, B, \cdot) sendo controlável e o sistema (A, \cdot, C) sendo observável, podemos não conseguir estabilizar o sistema, conforme mostra o seguinte exemplo.

⁷O número de condicionamento de uma matriz A não-singular é definido como $\|A^{-1}\| \|A\|$ e é uma maneira de verificar se a matriz A está próxima de ser singular ou não. Mais detalhes podem ser vistos em [10].

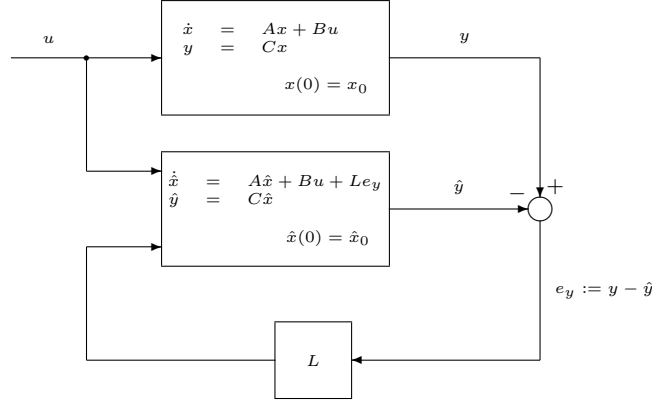


Figura 8: Observador de Luenberger acoplado ao sistema original

Exemplo 14. Considere o sistema

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Utilizando o Teorema 5 e o Teorema 12, podemos concluir que o sistema é controlável e observável. Usando um controle linear por realimentação de saída f , temos que a matriz de dinâmica do sistema em malha fechada é

$$(A + BfC) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ f - 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e os autovalores são $\lambda_{\pm} = \pm\sqrt{f-1}$. Note que é impossível escolher um valor de f tal que λ_+ e λ_- tenham ambos parte real negativa.

6.2.2 Observador de Luenberger

Invés de realimentar o sistema diretamente com a saída, vamos realimentar ele com uma estimativa dos estados. Para estimar os estados, usaremos uma construção chamada de **observador de Luenberger**.

Considere o sistema dinâmico dado por

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(C\hat{x} - y) \quad (38)$$

O sistema (38) é composto de uma parte que simula o sistema original mais um termo que é proporcional à diferença da saída do sistema original e a saída do sistema simulado. A ideia é corrigir assintoticamente o erro entre o estado estimado, \hat{x} , e o estado do sistema original x com base nessa diferença. Para isso, devemos escolher uma matriz L adequada.

O erro entre o estado do sistema original e o estado estimado é definido por $\varepsilon := x - \hat{x}$ e satisfaz

$$\dot{\varepsilon} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = A\varepsilon - L(Cx - C\hat{x}) = (A - LC)\varepsilon.$$

Para garantir que o erro ε convirja para 0, podemos entender este problema como um problema de estabilização:

$$\dot{\varepsilon} = (A - LC)\varepsilon \implies \dot{\varepsilon}^T = (A^T - C^T L^T)\varepsilon^T$$

Se $(A^T, -C^T)$ é estabilizável, então existe K tal que os autovalores de $A^T - C^T K$ têm parte real negativa, portanto basta tomar $L = K^T$. Nesse caso, dizemos que (A, C) é **detectável**.

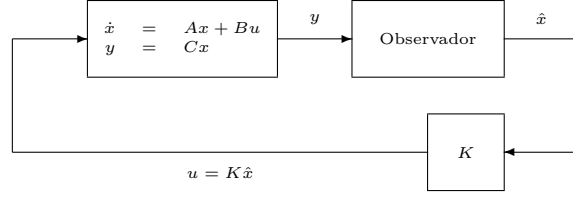


Figura 9: Controlador com observador de Luenberger

Exercício 11. Seja $(A, C,)$ um sistema autônomo e $N \subset \mathbb{R}^n$ seu subespaço não observável. O sistema $(A, C,)$ é **detectável** quando

$$N \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \lim_{t \rightarrow \infty} e^{tA}x = 0\}.$$

6.2.3 Controle com observador de estados

Acoplando o observador de Luenberger ao sistema original, podemos expressar a dinâmica do sistema como um todo da seguinte forma (ver Figura 9):

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK & LC \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \quad (39)$$

Podemos interpretar o sistema (39) como um sistema por si só definindo o estado \tilde{x} como

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} A + BK & LC \\ 0 & A - LC \end{bmatrix}.$$

Desse modo,

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x}$$

e podemos analisar a estabilidade deste sistema usando os autovalores do mesmo.

Note que o polinômio característico de \tilde{A} é dado por

$$\begin{aligned} p_{\tilde{A}}(\lambda) &= \det \left(\begin{bmatrix} A + BK & LC \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \right) \\ &= \det(A + BK - \lambda I) \det(A - LC - \lambda I), \end{aligned}$$

logo se (A, B) é estabilizável e (A, C) é detectável, podemos escolher K e L de maneira que os autovalores de \tilde{A} possuem parte real negativa. Note ainda que podemos fazer essas escolhas de maneira independente: este é o chamado **princípio da separação**. princípio da separação de sistemas lineares permite separar o problema de estabilização por realimentação e estimação de estados em duas partes: se forem projetados um observador de Luenberger estável e um controlador por realimentação de estados estável, então o sistema de malha fechada com o observador e a realimentação combinadas também é estável. No contexto de estabilização de sistemas não-lineares com realimentação de estados, esse princípio vale *localmente* quando o estabilizador e o observador são exponencialmente estáveis (ver [16]). Porém, diferentemente do caso linear, este princípio não vale globalmente para sistemas não-lineares: um contra-exemplo com um sistema não-linear em tempo discreto é dado em [14], e no tempo contínuo em [13].

A Revisão de alguns resultados de álgebra linear

Neste apêndice será feita uma revisão de alguns conceitos e ferramentas importantes de álgebra linear úteis e necessários para o curso.

A.1 Fórmula de Leibniz para determinantes

Seja S_n o grupo de permutações. Temos que

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i), i},$$

onde $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^m$, sendo m o número de transposições que constituem σ .

A.2 Autovalores e autovetores

Considere um espaço vetorial V sobre um corpo \mathbb{F} (no caso, vamos considerar apenas \mathbb{R} ou \mathbb{C}) e $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear. Os **autovetores** de T são os vetores $v \in V$ diferentes de zero tal que existe $\lambda \in \mathbb{F}$ satisfazendo

$$T(v) = \lambda v. \quad (40)$$

Se v é um autovetor, o escalar λ é o **autovalor** correspondente ao vetor v . Se o espaço vetorial V possui dimensão finita n , então T pode ser representado por uma matriz $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Nesse caso, (40) pode ser escrita de maneira equivalente como

$$Av = \lambda v. \quad (41)$$

Intuitivamente, um autovetor da transformação T é um vetor que não muda a direção (mas possivelmente a norma) quando a transformação T é aplicada a este vetor. Uma matriz de ordem n possui exatamente n autovalores (não necessariamente distintos). De fato, (41) é equivalente ao sistema linear

$$(A - \lambda I)v = 0.$$

Note que $v = 0$ é uma solução deste sistema, e se $\det(A - \lambda I) \neq 0$, esta é a única solução deste sistema. Como estamos interessados nos vetores diferentes de 0, exigimos que $\det(A - \lambda I) = 0$. Esta última equação é uma equação polinomial em λ , pois as operações envolvidas no cálculo de $\det(A - \lambda I)$ são apenas de soma, subtração e multiplicação. Definimos o **polinômio característico** de A como

$$p_A(\lambda) := \det(A - \lambda I).$$

As raízes de p_A são justamente os valores tal que $\det(A - \lambda I) = 0$, ou seja, são os autovalores de A . Pelo teorema fundamental da álgebra, p_A possui n raízes (não necessariamente distintas), o que implica que A possui exatamente n autovalores. A multiplicidade de uma raiz λ' de p_A é definida como a **multiplicidade algébrica** do autovalor λ' e será denotada por $\rho_{\text{ALG}}(\lambda')$.

Seja λ' um autovalor de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Temos então que $\det(A - \lambda' I) = 0$ e portanto, existem infinitos vetores v satisfazendo a equação

$$(A - \lambda' I)v = 0.$$

De fato, o conjunto $\{v \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda' I)v = 0\}$ é um espaço vetorial: é igual ao espaço nulo da matriz $(A - \lambda' I)$, e qualquer vetor pertencente a este espaço é um autovetor correspondente ao autovalor λ' . Este espaço é chamado de **autoespaço** associado a λ' , e a dimensão deste espaço é a **multiplicidade geométrica** de λ' e será denotada por $\rho_{\text{GEO}}(\lambda')$. Em outras palavras, $\rho_{\text{GEO}}(\lambda') = \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda' I)$.

A.3 Teorema de Cayley-Hamilton

Teorema 18. *Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e*

$$p_A(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0$$

o polinômio característico de A . Defina a função $\tilde{p}_A : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ como a função que leva a matriz M à matriz

$$a_n M^n + a_{n-1} M^{n-1} + \cdots + a_1 M + a_0.$$

Temos que $\tilde{p}_A(A) = 0$.

A.4 Diagonalização e forma canônica de Jordan

Os autovalores e os autovetores de uma matriz podem ser usados para transformar certas matrizes em matrizes diagonais em um processo chamado **diagonalização**. O teorema espectral para espaços de dimensão finita diz que toda matriz A **normal** (isto é, matrizes cujos autovalores possuem multiplicidade algébrica igual a multiplicidade geométrica) pode ser posta por uma transformação de equivalência P na forma

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad (42)$$

onde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são os autovalores de A .

A matriz P é construída da seguinte maneira: supondo que os autovalores são todos distintos, a i -ésima coluna de P é um autovetor correspondente a λ_i . Caso contrário, pelo menos um autovalor possui multiplicidade algébrica maior que 1. Como a matriz é normal, a multiplicidade geométrica destes autovalores é igual à respectiva multiplicidade algébrica (quando $\rho_{\text{ALG}}(\lambda') = \rho_{\text{GEO}}(\lambda')$, dizemos que λ' é **semi-simples**). Isto significa que o autoespaço associado a estes autovalores possui dimensão igual à multiplicidade algébrica do autovalor correspondente. Deste modo, as $\rho_{\text{GEO}}(\lambda')$ colunas correspondendo às colunas do autovalor λ' de multiplicidade $\rho_{\text{ALG}}(\lambda')$ serão formadas por uma base para o autoespaço associado ao autovalor λ' .

Exemplo. *Considere a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico de A é

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$$

As raízes de p_A são: 1 e 2. Portanto os autovalores de A são 1 e 2, sendo a multiplicidade algébrica de 1 igual a dois e a multiplicidade algébrica de 2 igual a um. Os autovetores de A correspondendo ao autovalor 1 são dados pela equação $Av = v$, isto é, são os vetores $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ satisfazendo a equação:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x + z = x \\ y = y \\ 2z = z \end{cases} \implies z = 0.$$

Portanto, o autoespaço associado ao autovalor 1 é o espaço de dimensão 2 gerado pelos vetores $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$.

Os autovetores de A correspondendo ao autovalor 2 são dados pela equação $Av = 2v$, isto é, são os vetores $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ satisfazendo a equação:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x + z = 2x \\ y = 2y \\ 2z = 2z \end{cases} \implies x = z, y = 0.$$

Portanto, o autoespaço associado ao autovalor 2 é o espaço de dimensão 1 gerado pelo vetor $(1, 0, 1)$.

Como a multiplicidade algébrica de cada autovalor é igual à multiplicidade geométrica de cada autovalor correspondente, a matriz A é diagonalizável e a matriz P é dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escrevendo

$$P = [v_1 \mid v_2 \mid \cdots \mid v_n],$$

obtemos que (42) é igual

$$A[v_1 \mid v_2 \mid \cdots \mid v_n] = [v_1 \mid v_2 \mid \cdots \mid v_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

ou seja, a multiplicação de v_i por A na base formada por v_1, \dots, v_n corresponde a multiplicar v_i por α_i , correspondendo à intuição inicial de que os autovetores são vetores que são invariantes a A , salvo por uma modificação da norma pelo autovalor correspondente.

No caso em que a matriz não é normal, ela ainda pode ser colocada numa forma “aproximadamente” diagonal. Precisamente, seja $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ com autovalores distintos $\lambda_1, \dots, \lambda_s$. Existe uma transformação $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tal que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \mathbf{J}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{J}(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{J}(\lambda_s) \end{bmatrix}, \quad (43)$$

onde

$$\mathbf{J}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} J_1(\lambda_i) & & & \\ & J_2(\lambda_i) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{t_i}(\lambda_i) \end{bmatrix}, \text{ com } J_k(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix},$$

onde $t_i = \rho_{\text{GEO}}(\lambda_i)$, $i = 1, \dots, s$, $k = 1, \dots, t_i$. Cada matriz $\mathbf{J}(\lambda_i)$ é chamada de **segmento de Jordan**, e cada uma das matrizes $J_k(\lambda_i)$ é chamada de **bloco de Jordan**. O número de blocos de Jordan de dimensão $m \times m$ no segmento $\mathbf{J}(\lambda_i)$ é dado por

$$\text{rank}((A - \lambda_i I)^{m-1}) - 2\text{rank}((A - \lambda_i I)^m) + \text{rank}((A - \lambda_i I)^{m+1}).$$

A matriz do lado direito de (43) é a chamada **forma canônica de Jordan** da matriz A . Pelo teorema de Jordan, toda matriz (mesmo não sendo normal) pode ser posta nesta forma bloco-diagonal.

É importante notar que justamente pelo fato de quase toda matriz ser diagonalizável, o cálculo numérico da forma canônica de Jordan é instável: uma pequena perturbação nas entradas das matrizes (como um erro numérico devido à limitação dos números representados por ponto flutuante) pode levar a uma forma de Jordan totalmente diferente da desejada.

Tanto a forma de Jordan quanto a forma diagonal de uma matriz são úteis para o cálculo de potência de matrizes e, como consequência, para o cálculo de funções de matrizes. Para ilustrar este fato, note que

$$A^k = (P^{-1}JP)^k = \underbrace{P^{-1}JP \cdots P^{-1}JP}_{k \text{ vezes}} = P^{-1}J^kP,$$

onde J^k pode ser calculado como

$$J^k = \begin{bmatrix} \mathbf{J}^k(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{J}^k(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{J}^k(\lambda_s) \end{bmatrix}, \text{ com } \mathbf{J}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} J_1^k(\lambda_i) & & & \\ & J_2^k(\lambda_i) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{t_i}^k(\lambda_i) \end{bmatrix}$$

e sendo a k -ésima potência de um bloco de Jordan $J_\ell(\lambda_i)$ de dimensão $m \times m$ dada por

$$J_\ell^k(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i^k & \binom{k}{1}\lambda_i^{k-1} & \cdots & \binom{k}{m-1}\lambda_i^{k-m+1} \\ 0 & \lambda_i^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \binom{k}{1}\lambda_i^{k-1} \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i^k \end{bmatrix}. \quad (44)$$

Conforme será visto na próxima seção, este último resultado pode ser generalizado para funções matriciais mais gerais que a potenciação.

A.5 Funções de matrizes

Considere uma função analítica $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ cuja expansão de Taylor em $\alpha \in \mathbb{C}$ seja dada por

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - \alpha)^k. \quad (45)$$

Para $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, podemos definir uma função $f : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ dada por

$$f(A) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (A - \alpha I)^k, \quad (46)$$

supondo que a série esteja bem definida. O próximo teorema nos diz quando a série (46) converge:

Teorema 19. [7, pg. 76] *Seja $r > 0$ o raio de convergência de (45). Dado $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, a série (46) converge se os autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de A satisfazem $|\lambda_i - \alpha| < r$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.*

Note que pelo Teorema 19 a série matricial associada a função exponencial e^z e qualquer potência z^k converge para toda matriz A . Pode-se demonstrar (ver [7, pg. 4] para mais detalhes) também que a aplicação de f em cada bloco de Jordan de A é dada por:

$$f \left(\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{f(\lambda)}{0!} & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \cdots & \frac{f^{(n)}(\lambda)}{n!} \\ 0 & \frac{f(\lambda)}{0!} & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{f(\lambda)}{0!} & \frac{f'(\lambda)}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{f(\lambda)}{0!} \end{bmatrix}. \quad (47)$$

B Outros resultados

Lema 2. *Seja $p : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ uma função polinomial. $p^{-1}(\{0\})$ possui medida nula ou $p^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R}^N$ (isto é, p é identicamente nulo).*

Demonstração. Note que como p é contínua, temos que $p^{-1}(\{0\})$ é fechado e portanto mensurável (no sentido de Lebesgue). O restante da prova será feita por indução em N . Seja λ_N a medida de Lebesgue N -dimensional. Se $N = 1$ e p é um polinômio de grau m que não é identicamente nulo, então p tem no máximo m raízes reais. Temos então que $\{x \in \mathbb{R} : p(x) = 0\}$ é um conjunto finito e portanto $\lambda_1(\{x \in \mathbb{R} : p(x) = 0\}) = 0$.

Suponha agora que o resultado seja válido para $N - 1$. Seja $p : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ um polinômio não identicamente nulo. Podemos escrever p como

$$p(x_1, \dots, x_N) = \sum_{\substack{k_2, \dots, k_N \\ k_2 + \dots + k_N = m}} q_{k_2, \dots, k_N}(x_1) x_2^{k_2} \cdots x_N^{k_N}$$

onde $q_{k_2, \dots, k_N} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são polinômios. Como p não é identicamente nulo, deve existir $\bar{k} = (\bar{k}_2, \dots, \bar{k}_N)$ tal que $q_{\bar{k}}$ não é identicamente nulo. Para esses valores de \bar{k} , $q_{\bar{k}}^{-1}(\{0\})$ é finito, portanto $S := \{x_1 \in \mathbb{R} : p(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0, \forall (x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{N-1}\}$ também é finito, logo S tem medida nula. Para um x_1 fixo e não pertencente a S , a função polinomial $p_{x_1}(x_2, \dots, x_N) := p(x_1, x_2, \dots, x_N)$ não é identicamente nula. Portanto, pela hipótese de indução, $p_{x_1}^{-1}(\{0\})$ possui medida nula. Em outras palavras, $p_{x_1} \neq 0$ em quase todo ponto. Logo,

$$\begin{aligned} \lambda_N(p^{-1}(\{0\})) &= \int \lambda_{N-1}\{(x_2, \dots, x_N) : p(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0\} dx_1 \\ &= \int_S \lambda_{N-1}\{(x_2, \dots, x_N) : p(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0\} dx_1 + \int_{\mathbb{R}^{N-1} \setminus S} 0 dx_1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Lista de Símbolos

x^T	transposta do vetor x
x_i	i -ésima componente do vetor x
$\ x\ $	norma do vetor x
A^T	transposta da matriz A
$\ A\ $	norma da matriz A
$\det(A)$	determinante da matriz A
$\text{rank}(A)$	posto da matriz A
$\text{Ker}(A)$	espaço nulo (núcleo) da matriz A
I	matriz identidade
e^A	exponencial da matriz A
$\Phi_A(t, t_0)$	matriz de transição de estados
$(t_0, x_0) \xrightarrow{\bar{u}} (t_1, x_1)$	controle \bar{u} leva o estado inicial x_0 no tempo t_0 ao estado final x_1 no tempo t_1
$C^k(I; \mathbb{R}^n)$	funções k vezes continuamente diferenciáveis no intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ tomando valores em \mathbb{R}^n
$L^p(I; \mathbb{R}^n)$	funções p -integráveis no intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ tomando valores em \mathbb{R}^n
\dot{x}	derivada temporal de x , $\frac{d}{dt}x$
∇F	gradiente de F

Referências

- [1] Ludwig Arnold. *Random dynamical systems*. Springer, 1995.
- [2] Johann Baumeister and Antonio Leitão. *Introdução à teoria de controle e programação dinâmica*. IMPA, 2008.
- [3] Nam Parshad Bhatia and George Philip Szegő. *Dynamical systems: Stability theory and applications*, volume 1967. Springer, 1967.
- [4] C.T. Chen. *Linear system theory and design*. The Oxford series in electrical and computer engineering. Oxford University Press, 2009.
- [5] Gene F Franklin, J David Powell, and Michael L Workman. *Digital control of dynamic systems*, volume 3. Addison-wesley Menlo Park, CA, 1998.
- [6] Anibal Galindro and Delfim F. M. Torres. A simple mathematical model for unemployment: a case study in Portugal with optimal control. *arXiv preprint arXiv:1801.00058*, 2017.
- [7] Nicholas J Higham. *Functions of matrices: theory and computation*. SIAM, 2008.
- [8] Bin Hu and Laurent Lessard. Control interpretations for first-order optimization methods. *arXiv preprint arXiv:1703.01670*, 2017.
- [9] Hassan K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 3 edition, 2002.
- [10] Carl D Meyer. *Matrix analysis and applied linear algebra*, volume 2. Siam, 2000.
- [11] Cleve Moler and Charles Van Loan. Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty-five years later. *SIAM review*, 45(1):3–49, 2003.
- [12] Eduardo D Sontag. *Mathematical control theory: deterministic finite dimensional systems*, volume 6. Springer Science & Business Media, 1990.
- [13] Eduardo D. Sontag and Mikhail Krichman. An example of a GAS system which can be destabilized by an integrable perturbation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(6):1046–1049, 2003.
- [14] V. Sundarapandian. A counterexample for the global separation principle for discrete-time nonlinear systems. *Applied Mathematics Letters*, 18(7):765–768, July 2005.
- [15] Simant Ranjan Upreti. *Optimal control for chemical engineers*. CRC Press, 2012.
- [16] Mathukumalli Vidyasagar. *Nonlinear systems analysis*. SIAM, 2002.

Índice Remissivo

E

entrada do sistema, [3](#)
exponencial de matriz, [8](#)

F

forma canônica controlável, [28](#)
fórmula de Ackermann, [28](#)
fórmula de Liouville, [11](#)

G

gramiano de alcançabilidade, [19](#)
gramiano de observabilidade
 caso contínuo, [14](#)
 caso discreto, [17](#)

L

lema de Heymann, [29](#)

M

matriz de controlabilidade, [21](#)
matriz de observabilidade
 caso contínuo, [14](#)
 caso discreto, [16](#)
matriz de transição de estados, [11](#)
matriz fundamental do sistema, [10](#)
modelo de aprendizado de DeGroot, [17](#)

N

núcleo de reconstrução, [16](#)

O

observador de Luenberger, [32](#)

P

ponto de equilíbrio, [23](#)
 assintoticamente estável, [23](#)
 atrativo, [23](#)
 estável, [23](#)
 instável, [23](#)

S

sistema
 autônomo, [14](#)
 invariante no tempo, [14](#)
sistema detectável, [32](#)
sistema dual, [20](#)
sistema estabilizável, [31](#)
subespaço atingível, [21](#)
subespaço não observável, [15](#)

V

variáveis de controle, [3](#)
variáveis de estado, [3](#)
variáveis de saída, [5](#)